

**BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐIỆN LỰC**



NGÔ VĂN HƯỜNG

**XÂY DỰNG PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN
BỘ LỌC KALMAN TÍN HIỆU LIÊN TỤC**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT ĐIỆN TỬ

HÀ NỘI, 2024

**BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐIỆN LỰC**

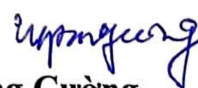
NGÔ VĂN HƯỞNG

**XÂY DỰNG PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN
BỘ LỘC KALMAN TÍN HIỆU LIÊN TỤC**

**Chuyên ngành : Kỹ Thuật Điện Tử
Mã số : 8520203**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT ĐIỆN TỬ

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Nguyễn Tăng Cường



HÀ NỘI, 2024

Số: 729...../QĐ-ĐHDL

Hà Nội, ngày 15 tháng 5 năm 2023

QUYẾT ĐỊNH

V/v phân công người hướng dẫn và tên đề tài luận văn thạc sĩ
đối với các học viên khoá 10 (2022-2024) ngành: Kỹ thuật điện tử

HIỆU TRƯỞNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐIỆN LỰC

Căn cứ Quyết định số 4010/QĐ-BCT ngày 6/10/2016 của Bộ Công Thương quy định chức năng, nhiệm vụ, quyền hạn và cơ cấu tổ chức của Trường Đại học Điện lực;

Căn cứ Quyết định số 20/QĐ-HĐT ngày 01/10/2019 của Hội đồng trường Trường Đại học Điện lực Ban hành Quy chế tổ chức và hoạt động của trường Đại học Điện lực;

Căn cứ Quyết định số 2446/QĐ-BGDĐT ngày 4/7/2013 của Bộ Giáo dục & Đào tạo cho phép Trường Đại học Điện lực đào tạo trình độ thạc sĩ ngành Kỹ thuật điện tử;

Căn cứ Quyết định số 666/QĐ-ĐHDL ngày 31/5/2022 của Trường Đại học Điện lực về việc Ban hành Quy chế tuyển sinh và đào tạo trình độ thạc sĩ tại Trường Đại học Điện lực;

Căn cứ Quyết định số 1972/QĐ-ĐHDL ngày 28/10/2022 của Trường Đại học Điện lực về việc công nhận các thí sinh trúng tuyển nhập học đào tạo trình độ thạc sĩ khóa 10 (2022 - 2024) đợt 2 năm 2022;

Căn cứ Quyết định số 310/QĐ-ĐHDL ngày 23/02/2023 của Trường Đại học Điện lực về việc công nhận các thí sinh trúng tuyển nhập học đào tạo trình độ thạc sĩ khóa 10 (2022 - 2024) đợt 3 năm 2022;

Theo đề nghị của Trường phòng Đào tạo Sau Đại học.

QUYẾT ĐỊNH:

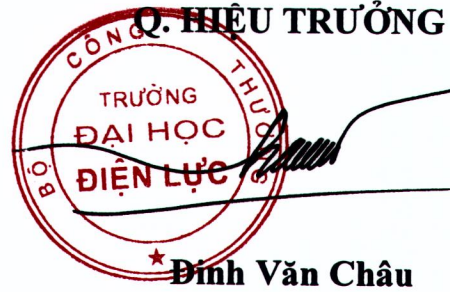
Điều 1. Giao tên đề tài luận văn thạc sĩ và phân công người hướng dẫn luận văn cho các học viên khoá 10 (2022-2024) đợt 2 & đợt 3 năm 2022 ngành Kỹ thuật điện tử, mã số 8520203 (có danh sách kèm theo).

Điều 2. Học viên và người hướng dẫn luận văn thạc sĩ có quyền lợi và nhiệm vụ theo Quy chế đào tạo thạc sĩ của trường Đại học Điện lực và Quy chế đào tạo thạc sĩ hiện hành của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Điều 3. Trường các đơn vị: Phòng Đào tạo Sau Đại học, Phòng Kế hoạch Tài chính, Khoa Điện tử Viễn thông và các cá nhân liên quan tại Điều 1 chịu trách nhiệm thi hành Quyết định này./.

Nơi nhận:

- Như Điều 3;
- Các PHT (để biết);
- Các đơn vị liên quan (để thực hiện);
- Lưu: VT, ĐTSĐH, PhuongBT(05).



PHỤ LỤC: DANH SÁCH GIAO ĐỀ TÀI LUẬN VĂN THẠC SĨ VÀ NGƯỜI HƯỚNG DẪN LUẬN VĂN THẠC SĨ
NGÀNH: KỸ THUẬT ĐIỆN TỬ, MÃ SỐ 8520203 - ĐỢT 2 KHÓA 10 (2022 -2024)
(kèm theo Quyết định số 729 /QĐ-ĐHDL ngày 15 tháng 5 năm 2023 của Trường Đại học Điện lực)

STT	Mã học viên	Họ và tên	Giới tính	Ngày sinh	Nơi sinh	Tên đề tài luận văn thạc sĩ	Tên người hướng dẫn khoa học	Đơn vị công tác
1	22CH5030001	Phạm Minh Thắng	Nam	11/11/1987	Hà Nội	Tối ưu độ trễ trong mạng 5G	NHD1: PGS. TS Hà Hải Nam SĐT: 0916634567 Email: hhnam@mic.gov.vn	Trường Đại học Điện lực
							NHD2: TS. Nguyễn Đức Thủy SĐT: 0912464048 Email: nguyenducthuy07@gmail.com	Trường Đại học Điện lực
2	22CH5030002	Nguyễn Việt Hoàng	Nam	23/08/1999	Hà Nội	Nghiên cứu xây dựng hệ thống giám sát tín hiệu điện tim ECG trên nền tảng IoT	NHD1: TS. Ngô Duy Tân SĐT: 0904138108 Email: Tan.ngoduy@gmail.com	Trường Đại học Điện lực
							NHD2: TS. Thẩm Đức Phương SĐT: 0903229117 Email: phuongtd@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực
3	22CH5030003	Đinh Bảo Hà	Nam	14/06/1981	Hà Nội	Nghiên cứu phương pháp tính toán rủi ro do sét gây ra đối với trạm viễn thông.	TS. Phạm Duy Phong SĐT: 0912348885 Email: phongphd@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực
4	22CH5030004	Trần Ngọc Ánh	Nữ	01/07/1998	Quảng Ninh	Nghiên cứu phương pháp lấy mẫu thưa nhằm nâng cao hiệu quả thu nhận ảnh cộng hưởng từ hạt nhân.	TS. Nguyễn Thị Thủy SĐT: 0985812401 Email: thuynt@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực
5	22CH5030005	Đỗ Anh Tú	Nam	26/01/1998	Hà Nội	Tối ưu kích thước trong thiết kế anten phẳng dải tần dưới 6GHz ứng dụng trí tuệ nhân tạo.	TS. Hoàng Thị Phương Thảo SĐT: 0982225258 Email: thaohp@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực



6	22CH5030006	Nguyễn Hải Quân	Nam	05/09/1998	Hà Nội	Một phương pháp sử dụng học máy để phát hiện FLYCAM dựa vào phổ tín hiệu vô tuyến.	TS. Nguyễn Lê Cường SĐT: 0913546234 Email: cuongnl@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực
7	22CH5030007	Ngô Văn Hưởng	Nam	04/03/1996	Bắc Ninh	Xây dựng phương pháp tính toán bộ lọc KALMAN tín hiệu liên tục.	PGS.TS Nguyễn Tăng Cường SĐT: 0912045795 Email: cuongnt@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực
8	22CH5030008	Nguyễn Quốc Hùng	Nam	29/05/1993	Hà Nội	Ứng dụng mạng NEURON nhân tạo hỗ trợ chẩn đoán bệnh ALZHEIMER.	PGS.TS Huỳnh Lương Nghĩa SĐT: 0913084711 Email: nghiahhl@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực
9	22CH5030009	Phạm Văn Thiệm	Nam	01/05/1999	Nam Định	Nghiên cứu thiết kế chế tạo thử nghiệm thiết bị cảm biến cầm tay định lượng H2O2 nhằm xác định nồng độ Glucose	TS. Lê Trọng Hiếu SĐT: 0906480210 Email: hieult@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực
10	22CH5030010	Nguyễn Thị Tố Anh	Nữ	11/11/1999	Bắc Giang	Xây dựng mô hình nhà thông minh ứng dụng AI	TS Nguyễn Nam Quân SĐT: 0913572484 Email: quannn@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực
11	22CH5030011	Lê Hoàng Dương	Nam	27/06/1999	Vĩnh Phúc	Nghiên cứu ứng dụng Deep Learning nhằm cải thiện khả năng phát hiện ung thư vú khi chụp nhũ ảnh sàng lọc	NHD1: PGS.TS Đỗ Xuân Tiến SĐT: 0903297424 Email: tiendx@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực
							NHD2: TS. Doãn Thanh Bình SĐT: 0904454355 Email: binhdt@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực

* Danh sách này gồm: 11 học viên

KHOA ĐIỆN TỬ VIỄN THÔNG



TS. Phạm Duy Phong

PHÒNG ĐÀO TẠO SAU ĐẠI HỌC



TS. Lê Thành Doanh

Q. HIỆU TRƯỞNG



PGS.TS Đinh Văn Châu

PHỤ LỤC: DANH SÁCH GIAO ĐỀ TÀI LUẬN VĂN THẠC SĨ VÀ NGƯỜI HƯỚNG DẪN LUẬN VĂN THẠC SĨ
NGÀNH: KỸ THUẬT ĐIỆN TỬ, MÃ SỐ 8520203 - ĐỢT 3 KHÓA 10 (2022 -2024)

(kèm theo Quyết định số 729 /QĐ-ĐHDL ngày 15 tháng 5 năm 2023 của Trường Đại học Điện lực)

STT	Mã học viên	Họ và tên	Giới tính	Ngày sinh	Nơi sinh	Tên đề tài luận văn thạc sĩ	Tên người hướng dẫn khoa học	Đơn vị công tác
1	22CH5030012	Phan Thanh Thìn	Nam	07/12/1988	Hà Nội	Nghiên cứu thực hiện bù méo phi tuyến bộ khuếch đại dựa trên bảng tra	NHD1: TS. Trần Văn Nghĩa SĐT: 0973326312 Email: nghiamosmpt@gmail.com	Học viện Phòng không không quân
							NHD2: TS. Hồ Mạnh Cường SĐT: 0983500620 Email: cuonghm@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực
2	22CH5030013	Trần Đại Phong	Nam	03/12/1994	Nam Định	Nghiên cứu, thiết kế, chế tạo máy rửa siêu âm ứng dụng làm sạch các dụng cụ y tế	TS. Lai Thị Vân Quyên SĐT: 0903294048 Email: vanquyen2407@gmail.com	Trường Đại học Điện lực
3	22CH5030014	Lê Thanh Phong	Nam	14/01/1999	Hải Phòng	Tính toán, đánh giá độ phức tạp của một dãy số phi tuyến có cấu trúc lồng ghép	HD1: TS. Hoàng Thị Phương Thảo SĐT: 0982225258 Email: thaohp@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực
							HD2: TS. Lê Chí Quỳnh SĐT: 0913214000 Email: quynhlc@epu.edu.vn	Trường Đại học Điện lực

* Danh sách này gồm: 3 học viên

KHOA ĐIỆN TỬ VIỄN THÔNG

PHÒNG ĐÀO TẠO SAU ĐẠI HỌC



TS. Phạm Duy Phong



TS. Lê Thành Doanh

Q. HIỆU TRƯỞNG



PGS.TS Đinh Văn Châu

Số: 1818/QĐ-ĐHDL

Hà Nội, ngày 25 tháng 10 năm 2024

QUYẾT ĐỊNH
Về việc thành lập Hội đồng chấm luận văn thạc sĩ khoá 10 (2022 - 2024)
ngành Kỹ thuật điện tử, mã số 8520203

HIỆU TRƯỞNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐIỆN LỰC

Căn cứ Nghị quyết số 03/NQ-HĐT ngày 30/5/2023 của Hội đồng trường Trường Đại học Điện lực ban hành Quy chế Tổ chức và hoạt động của Trường Đại học Điện lực;

Căn cứ Quyết định số 666/QĐ-ĐHDL ngày 31/5/2022 của Trường Đại học Điện lực về việc ban hành Quy chế đào tạo trình độ thạc sĩ;

Căn cứ Quyết định số 978/QĐ-ĐHDL ngày 28/6/2023 của Trường Đại học Điện lực về việc bổ sung một số điều của Quy chế đào tạo trình độ thạc sĩ;

Căn cứ Quyết định số 729/QĐ-ĐHDL ngày 15/5/2023 của Trường Đại học Điện lực về việc phân công người hướng dẫn và tên đề tài luận văn thạc sĩ đối với các học viên cao học khóa 10 (2022-2024) ngành Kỹ thuật điện tử;

Căn cứ Hồ sơ đăng ký bảo vệ luận văn thạc sĩ của học viên và Đề nghị danh sách Hội đồng chấm luận văn thạc sĩ ngày 25/10/2024 của Khoa Điện tử Viễn thông;

Căn cứ Tờ trình số 199/TTr-QL Đào tạo ngày 25/10/2024 của Phòng Quản lý Đào tạo về việc đề nghị thành lập Hội đồng chấm luận văn thạc sĩ khóa 2022 ngành Kỹ thuật điện tử;

Theo đề nghị của Trưởng phòng Quản lý Đào tạo.

QUYẾT ĐỊNH:

Điều 1. Thành lập Hội đồng đánh giá luận văn thạc sĩ khóa 10 (2022-2024) cho học viên Cao học:

Họ và tên học viên: Ngô Văn Hưởng

Giới tính: Nam

Sinh ngày: 04/03/1996

Nơi sinh: Bắc Ninh

Lớp: CH10.KTĐT2

Mã HV : 22CH5030007

Ngành đào tạo: Kỹ thuật điện tử

Mã số: 8520203

Tên đề tài luận văn: Xây dựng phương pháp tính toán bộ lọc KALMAN tín hiệu liên tục.

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS Nguyễn Tăng Cường

Đơn vị công tác: Trường Đại học Điện lực

Điều 2. Cử Ông (bà) có tên sau đây tham gia vào Hội đồng đánh giá luận văn thạc sĩ.

STT	Họ và tên (học hàm, học vị)	Đơn vị công tác	Chức danh trong HĐ
1	TS. Phạm Duy Phong	Trường Đại học Điện lực	Chủ tịch
2	TS. Hoàng Thị Phương Thảo	Trường Đại học Điện lực	Thư kí
3	TS. Trần Văn Nghĩa	Học viện Phòng không Không quân	Phản biện 1
4	TS. Ngô Duy Tân	Trường Đại học Điện lực	Phản biện 2
5	TS. Bạch Nhật Hoàng	Viện Điện tử, Viện Khoa học & Công nghệ Quân sự	Ủy viên

Điều 3. Hội đồng đánh giá luận văn thạc sĩ có trách nhiệm tổ chức đánh giá trong thời hạn 30 ngày kể từ ngày kí Quyết định. Hội đồng tự giải thể sau khi hoàn thành nhiệm vụ.

Điều 4. Trưởng các đơn vị: Phòng Quản lý Đào tạo, Phòng Kế hoạch - Tài chính, Khoa Điện tử Viễn thông, các đơn vị khác có liên quan, các thành viên trong Hội đồng chấm luận văn thạc sĩ tại Điều 2 và các cá nhân có tên tại Điều 1 chịu trách nhiệm thi hành Quyết định này. /.

Nơi nhận:

- Như Điều 4;
- HT (để báo cáo);
- Lưu: VT, QLĐào tạo, PhươngBT (05).

KT.HIỆU TRƯỞNG
PHÓ HIỆU TRƯỞNG



*Nguyễn Lê Cường

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy PGS. TS. Nguyễn Tăng Cường, người đã hướng dẫn luận văn thạc sĩ của mình. Nhờ sự chỉ bảo tận tình, hướng dẫn chu đáo, cùng với sự hỗ trợ, giúp đỡ quý báu của Thầy trong suốt quá trình thực hiện, tôi đã hoàn thành được luận văn này.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các Thầy, Cô đã giảng dạy, truyền đạt kiến thức trong suốt quá trình học tập tại Trường Đại học Điện lực. Bên cạnh đó, tôi xin cảm ơn các bộ phận, phòng ban chức năng của trường đã hỗ trợ và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Đồng thời, tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các đồng nghiệp, bạn bè và gia đình, những người đã luôn bên cạnh, động viên và hỗ trợ tôi trong suốt chặng đường học tập và nghiên cứu.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới các cơ quan ban ngành đã giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi và cung cấp các thông tin cần thiết phục vụ cho quá trình nghiên cứu của luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn!

Hà Nội, ngày ... tháng ... năm 202

Tác giả



Ngô Văn Hưởng

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan đã sử dụng các tài liệu tham khảo của các tác giả, các nhà khoa học và các luận văn được trích dẫn trong phụ lục “Tài liệu tham khảo” cho việc nghiên cứu và viết luận văn của mình ...

Tôi cam đoan về các số liệu và kết quả tính toán được trình bày trong luận văn là hoàn toàn do tác giả tự tìm hiểu và thực hiện trong quá trình nghiên cứu và viết luận văn của mình, không sao chép và chưa được sử dụng cho đề tài luận văn nào ...

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, ngày ... tháng ... năm 202

Tác giả



Ngô Văn Hưởng

MỤC LỤC

DANH MỤC CHỮ VIẾT TẮT	iii
DANH MỤC BẢNG, HÌNH VẼ	iv
I. MỞ ĐẦU.....	1
1. Lý do chọn đề tài.....	1
2. Mục tiêu nghiên cứu	1
3. Nhiệm vụ nghiên cứu	1
4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu	2
5. Phương pháp nghiên cứu	2
II. NỘI DUNG	2
CHƯƠNG 1: LỘC KALMAN VÔ HƯỚNG TÍN HIỆU LIÊN TỤC	3
1.1. Đặt vấn đề	3
1.2. Phương trình Lọc Kalman (KF).....	5
1.3. Hệ số khuếch đại lọc Kalman	7
1.4. Tính toán Lọc Kalman vô hướng	9
1.4.1. Trường hợp ứng dụng 1.....	9
1.4.2. Trường hợp ứng dụng 2.....	10
1.4.3. Trường hợp ứng dụng 3.....	11
1.4.4. Trường hợp ứng dụng 4.....	13
CHƯƠNG 2: LỘC KALMAN LIÊN TỤC NHIỀU CHIỀU (DẠNG MA TRẬN)	19
2.1. Phương trình Lọc Kalman nhiều chiều	19
2.2. Tính toán lọc Kalman nhiều chiều	28
2.2.1. Trường hợp ứng dụng 1.....	28
2.2.2. Trường hợp ứng dụng 2.....	35
2.2.3. Trường hợp ứng dụng 3.....	36
2.2.4. Trường hợp ứng dụng 4.....	37
2.2.5. Trường hợp ứng dụng 5.....	41
2.2.6. Trường hợp ứng dụng 6.....	48
CHƯƠNG 3: ÁP DỤNG LỘC KALMAN XÂY DỰNG MÁY THU TỐI ƯU TRÊN NỀN TẠP ÂM VÀ NHIỀU.....	53

3.1. Xây dựng cấu trúc máy thu tối ưu	53
3.2. Xây dựng hệ tối ưu có tính đến bù khử nhiễu phổ hẹp vùng tần số cao.....	60
III. KẾT LUẬN	67
DANH MỤC CÁC TÀI LIỆU THAM KHẢO	69
PHỤ LỤC.....	1

DANH MỤC CHỮ VIẾT TẮT

STT	Ký hiệu chữ viết tắt	Chữ viết đầy đủ
1	QTNN	Quá trình ngẫu nhiên
2	LTH	Lọc tạo hình
3	PTVPNN	Phương trình vi phân ngẫu nhiên
4	KF	Lọc Kalman
5	PTVP	Phương trình vi phân
6	ĐTBĐTS	Đặc tính biên độ tần số

DANH MỤC BẢNG, HÌNH VẼ

Hình 1-1: Sơ đồ cấu trúc bộ lọc tạo hình tín hiệu hữu ích $\lambda(t)$	4
Hình 1-2: Sơ đồ cấu trúc lọc Kalman	7
Hình 1-3: Sơ đồ nguyên lý lọc Kalman	13
Hình 1-4: Đồ thị sự phụ thuộc thông số β vào γ khi cường độ nhiễu thay đổi.....	17
Hình 2-1: Giá trị chuẩn hoá $k_{11}^*(\gamma)$ và $k_{21}^*(\gamma)$	32
Hình 2-2: Giá trị chuẩn hoá $k_{22}^*(\gamma)$ và $k_{12}^*(\gamma)$	32
Hình 2-3: Sự phụ thuộc thời gian của các phần tử $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{33}$ với $t=(0;1)$...	44
Hình 2-4: Sự phụ thuộc thời gian của các phần tử $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{33}$ với $t=(0;30)$..	45
Hình 2-5: Sự phụ thuộc sai số ước lượng vào phương sai	52
Hình 3-1: Sơ đồ cấu trúc bộ lọc tối ưu	56
Hình 3-2: Biểu diễn: a- phổ tín hiệu và nhiễu ở lối vào; b- phổ lối ra kênh lọc tín hiệu; c- đặc tính biên độ tần số theo tín hiệu; d- đặc tính biên độ tần số theo nhiễu;	57
Hình 3-3: Đồ thị phổ lượng vào và đồ thị ĐTBĐTS với $\alpha_1 / \alpha_2 = 10$	58
Hình 3-4: Đồ thị phổ lượng vào và đồ thị ĐTBĐTS với $\alpha_1 / \alpha_2 = 0,1$	58
Hình 3-5: Đồ thị ĐTBĐTS theo tín hiệu tại $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,1; S_0 = 20; S_1 = 0,25; S_2 = 0,5$..	59
Hình 3-6: Đồ thị phổ lượng vào và ra tại $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,1; S_0 = 20; S_1 = 0,5; S_2 = 0,25$	59
Hình 3-7: Phổ hiệu dụng lượng vào kênh quan sát $S_x(\omega)$ và phổ hiệu dụng lượng ra kênh quan sát $S_y(\omega)$	64
Hình 3-8: Phổ hiệu dụng $S_x(\omega)$ ở lối vào và phổ $S_y(\omega)$ ở lối ra bộ lọc Kalman và các ĐTBĐTS theo tín hiệu $S_x(\omega)$ và ĐTBĐTS theo nhiễu $S_y(\omega)$ tại $\gamma=0,1; \sigma_\lambda=10; \sigma_s=1; \Omega_1=3,05 \cdot 10^4; \Omega_0=3 \cdot 10^4$	65
Hình 3-9: Phổ hiệu dụng $S_x(\omega)$ ở lối vào và phổ $S_y(\omega)$ ở lối ra bộ lọc Kalman và các ĐTBĐTS theo tín hiệu $S_x(\omega)$ và ĐTBĐTS theo nhiễu $S_y(\omega)$ tại $\gamma=1; \sigma_\lambda=10; \sigma_s=1; \Omega_1=3,005 \cdot 10^4; \Omega_0=3 \cdot 10^4$	66

I. MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong bối cảnh hiện nay, các hệ thống kỹ thuật hiện đại ngày càng yêu cầu cao về khả năng xử lý tín hiệu chính xác trong môi trường có nhiễu nhiều và tạp âm. Việc tối ưu hóa hiệu suất của các hệ thống này đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực, từ truyền thông, radar, định vị đến điều khiển tự động và y sinh học.

Bộ lọc Kalman, với khả năng dự báo và ước lượng chính xác trạng thái của hệ thống từ các quan sát bị nhiễu, đã trở thành một công cụ quan trọng trong lý thuyết và ứng dụng xử lý tín hiệu. Đặc biệt, lọc Kalman tín hiệu liên tục là một hướng tiếp cận phù hợp để giải quyết các bài toán xử lý tín hiệu trong thời gian thực, giúp cải thiện hiệu quả của các hệ thống hoạt động trong môi trường động.

Tuy nhiên, việc tính toán và áp dụng bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục vẫn đối mặt với nhiều thách thức. Ở Việt Nam, tuy có nhiều tài liệu giáo trình giảng dạy đại học, sau đại học liên quan sâu đến lý thuyết và ứng dụng của bộ lọc Wiener và Kalman, nhưng đáng tiếc, chủ yếu bằng tiếng nước ngoài. Với mong muốn đóng góp vào việc phát triển lý thuyết và nâng cao khả năng ứng dụng của bộ lọc Kalman, đề tài “Xây dựng phương pháp tính toán bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục” được lựa chọn. Đề tài này không chỉ tập trung vào việc xây dựng phương pháp tính toán hiệu quả cho bộ lọc Kalman trong các hệ thống vô hướng và đa chiều, mà còn hướng tới áp dụng thực tiễn trong việc xây dựng máy thu tín hiệu tối ưu trên nền tạp âm và nhiễu.

Nghiên cứu này kỳ vọng sẽ mang lại các kết quả thiết thực, góp phần phát triển các giải pháp xử lý tín hiệu hiệu quả hơn, đồng thời mở ra hướng đi mới trong việc ứng dụng lý thuyết lọc Kalman vào các lĩnh vực khoa học và công nghệ.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu nghiên cứu tổng quát: Nắm vững nền tảng khoa học lý thuyết lọc Kalman để xây dựng phương pháp áp dụng trong lĩnh vực kỹ thuật vô tuyến, điện tử, điều khiển.

Mục tiêu nghiên cứu cụ thể: Xây dựng phương pháp tính toán bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục và áp dụng tổng hợp thuật toán máy thu tối ưu.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Hiểu và nắm được lý thuyết lọc Kalman tín hiệu ngẫu nhiên liên tục.

Tổng hợp thuật toán máy thu tối ưu sử dụng công cụ lọc Kalman.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Lý thuyết lọc tối ưu tuyến tính – Kalman và cấu trúc máy thu tín hiệu vô tuyến dưới tác động của nhiễu.

5. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu lý thuyết lọc Kalman và nghiên cứu ứng dụng trong kỹ thuật vô tuyến điện tử với Mô phỏng Matlab

II. NỘI DUNG

Luận văn bao gồm: Phần mở đầu, kết luận, phụ lục, danh mục tài liệu tham khảo, và nội dung của đề tài có 03 chương sau:

Chương 1. Lọc Kalman vô hướng tín hiệu liên tục

Chương 2. Lọc Kalman liên tục nhiều chiều (dạng ma trận)

Chương 3. Áp dụng lọc Kalman xây dựng máy thu tối ưu trên nền tạp âm và nhiễu

CHƯƠNG 1: LỌC KALMAN VÔ HƯỚNG TÍN HIỆU LIÊN TỤC

Trong lĩnh vực xử lý tín hiệu và điều khiển tự động, việc dự báo và ước lượng trạng thái của hệ thống từ các tín hiệu quan sát bị nhiễu đóng vai trò cốt lõi. Để giải quyết bài toán này, nhiều phương pháp đã được nghiên cứu và phát triển, trong đó bộ lọc Kalman được xem như một công cụ tối ưu và hiệu quả nhất.

Bộ lọc Kalman không chỉ cung cấp các giải pháp lý thuyết mạnh mẽ mà còn có ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như điều hướng, theo dõi radar, xử lý tín hiệu, và robot tự hành. Với khả năng xử lý dữ liệu trong thời gian thực và hoạt động tốt trong môi trường nhiễu loạn, bộ lọc Kalman đã trở thành một công cụ không thể thiếu trong các hệ thống hiện đại.

Tuy nhiên, khi áp dụng vào tín hiệu liên tục, việc tính toán và triển khai bộ lọc Kalman trở nên phức tạp hơn so với dạng rời rạc. Điều này đòi hỏi một cách tiếp cận cẩn thận và phương pháp tính toán phù hợp để đảm bảo hiệu quả và tính ổn định.

Để làm rõ và phát triển nội dung này, chương 1 sẽ tập trung trình bày về lọc Kalman vô hướng tín hiệu liên tục, khởi đầu bằng việc đặt vấn đề về bài toán và mục tiêu nghiên cứu.

Với khả năng xử lý dữ liệu trong thời gian thực và hoạt động tốt trong môi trường nhiễu loạn, bộ lọc Kalman đã trở thành một công cụ không thể thiếu trong các hệ thống hiện đại. Tuy nhiên, khi áp dụng vào tín hiệu liên tục, việc tính toán và triển khai bộ lọc Kalman trở nên phức tạp hơn so với dạng rời rạc. Điều này đòi hỏi một cách tiếp cận cẩn thận và phương pháp tính toán phù hợp để đảm bảo hiệu quả và tính ổn định. Để làm rõ và phát triển nội dung này, chương 1 sẽ tập trung trình bày về lọc Kalman vô hướng tín hiệu liên tục, khởi đầu bằng việc đặt vấn đề về bài toán và mục tiêu nghiên cứu.

1.1. Đặt vấn đề

Xét tổ hợp tín hiệu cộng tính (gồm tín hiệu $s(t, \lambda)$ cộng với tạp trắng kênh đo lường $n(t)$ - nhiễu) tác động lên lối vào – kênh quan sát của bộ lọc tuyến tính

$$x(t) = s(t, \lambda) + n(t); \quad s(t, \lambda) = c(t)\lambda(t). \quad (1.1)$$

Biểu thức này được gọi là phương trình kênh quan sát (kênh đo lường).

Ở đây $\lambda(t)$ là quá trình ngẫu nhiên (QTNN) mang thông tin hữu ích và được tạo ra bằng cách truyền tín hiệu tạp trắng tạo hình $v(t)$ qua bộ lọc tạo hình (LTH) được mô tả bởi phương trình vi phân ngẫu nhiên (PTVPNN) có dạng

$$\frac{d\lambda}{dt} = a(t)\lambda(t) + v(t); \quad \lambda(0) = \lambda_0 \quad (1.2)$$

Trong các phương trình này, $a(t)$ và $v(t)$ là các hàm số phụ thuộc vào thời gian, suy ra bộ lọc Kalman (KF) trong trường hợp tổng quát sẽ là một hệ thống tuyến tính không dừng.

Giả sử rằng các QTNN $\lambda(t)$, $v(t)$, $n(t)$ là QTNN trung tâm (có kỳ vọng $E(.)$ bằng 0) và độc lập lẫn nhau:

$$\begin{aligned} E(\lambda_t) &= E(v_t) = E(n_t) = 0; \\ E(\lambda_t n_\tau) &= E(n_t v_\tau) = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

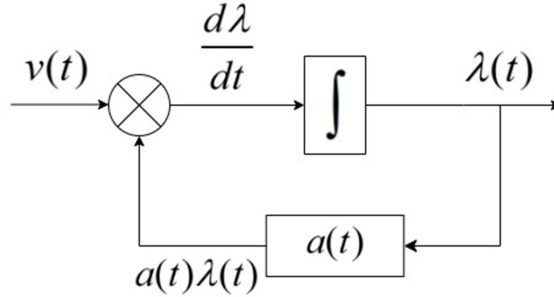
Theo định nghĩa, các tạp trắng $v(t)$ - kênh bộ lọc tạo hình tín hiệu hữu ích và tạp trắng $n(t)$ - nhiều kênh đo lường đều có hàm tương quan dạng xung Dirac (hàm Delta $\delta(t)$):

$$\begin{aligned} R_n(t, \tau) &= E(n_t n_\tau) = S_0(t) \delta(t - \tau); \\ R_v(t, \tau) &= E(v_t v_\tau) = q_v(t) \delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (1.4)$$

và hiển nhiên do tính độc lập của chúng, nên các hàm tương quan chéo:

$$E(n_t x_\tau) = 0; \quad E(v_t x_\tau) = 0. \quad (1.5)$$

Từ phương trình (1.2) ta có sơ đồ cấu trúc (Hình 1-1)



Hình 1-1: Sơ đồ cấu trúc bộ lọc tạo hình tín hiệu hữu ích $\lambda(t)$

Nhiệm vụ đặt ra là cần tổng hợp bộ lọc tuyến tính tối ưu (lọc Kalman) đưa ra ước lượng tối ưu $\hat{\lambda}(t)$ cho quá trình $\lambda(t)$ thông qua tín hiệu kênh đo lường (quan sát) $x(t)$

$$\hat{\lambda}(t) = \int_0^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (1.6)$$

Trong đó: $h(t, \tau)$ - hàm trọng lượng xung (đặc tính xung – là tín hiệu lỗi ra của hệ tuyến tính khi tác động lỗi vào là hàm xung Dirac) của bộ lọc tuyến tính.

1.2. Phương trình Lọc Kalman (KF)

Chỉ tiêu tối ưu được đặt ra để tổng hợp bộ lọc Kalman là giá trị cực tiểu (minimum) của sai số quân phương σ_e^2 (trung bình xác suất $E\{\cdot\}$ của bình phương sai số $e(t)$ giữa giá trị thật $\lambda(t)$ và ước lượng của nó $\hat{\lambda}(t)$; σ_e^2 còn được gọi là phương sai)

$$\sigma_e^2 = E\left\{\left[\lambda(t) - \hat{\lambda}(t)\right]^2\right\}; \quad e(t) = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t).$$

Khi đó, theo nguyên lý trực giao của hàm trọng lượng xung, bộ lọc Kalman phải thỏa mãn phương trình tích phân Winer – Hopf sau

$$R_{\lambda x}(t, \alpha) = \int_0^t h(t, \tau) R_x(\tau, \alpha) d\tau, \quad 0 < \alpha < t, \quad (1.7)$$

Trong đó:

$R_{\lambda x}(t, \alpha) = E(\lambda_t x_\alpha)$ - hàm tương quan chéo của tín hiệu hữu ích $\lambda(t)$ và tín hiệu kênh quan sát $x(t)$;

$R_x(\tau, \alpha) = E(x_\tau x_\alpha)$ - hàm tự tương quan của tín hiệu kênh quan sát $x(t)$;

Để tìm cấu trúc bộ lọc Kalman, cần triển khai phép tính lấy đạo hàm biểu thức về trái và biểu thức về phải (theo thời gian t) của phương trình Winer – Hopf (1.7). Đạo hàm biểu thức về trái

$$\frac{d}{dt}[R_{\lambda x}(t, \alpha)] = \frac{d}{dt}E[\lambda(t)x(\alpha)] = E\left[\frac{d\lambda}{dt}x(\alpha)\right].$$

Sử dụng PTVP của bộ LTH, ta nhận được

$$E\left[\frac{d\lambda}{dt}x(\alpha)\right] = E\{[a(t)\lambda(t) + v(t)]x(\alpha)\} = a(t)E[\lambda(t)x(\alpha)] = a(t)R_{\lambda x}(t, \alpha),$$

(do thành phần $E[v(t)x(\alpha)] = 0$)

Như vậy, ta có

$$a(t)R_{\lambda x}(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t h(t, \tau) R_x(\tau, \alpha) d\tau.$$

Sử dụng quy tắc Leibniz – lấy vi phân theo biến t ở cận trên của tích phân

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(t, \tau) d\tau = \int_0^t \frac{d}{dt}[\varphi(t, \tau)] d\tau + \varphi(t, t). \quad (1.8)$$

Nhận được

$$a(t)R_{\lambda x}(t, \alpha) = \int_0^t \frac{\partial h(t, \tau)}{\partial t} R_x(\tau, \alpha) d\tau + h(t, t)R_x(t, \alpha).$$

Biến đổi hàm tương quan $R_x(t, \alpha)$ ở vế phải có tính đến phương trình kênh quan sát và điều kiện trung bình xác suất $E(n_t x_\alpha) = 0$ và biểu thức vế phải phương trình Winer – Hopf:

$$\begin{aligned} R_x(t, \alpha) &= E(x_t x_\alpha) = E\{[c(t)\lambda(t) + n(t)]x(\alpha)\} = c(t)R_{\lambda x}(t, \alpha) = \\ &= c(t) \int_0^t h(t, \alpha) R_x(\tau, \alpha) d\tau. \end{aligned}$$

Sử dụng (1.7) vào hàm $R_{\lambda r}(t, \alpha)$, được kết quả

$$\int_0^t \left[\frac{\partial h(t, \tau)}{\partial t} + h(t, t)c(t)h(t, \tau) - a(t)h(t, \tau) \right] R_x(t, \alpha) d\tau = 0.$$

Tích phân trên bằng 0 chỉ ở trong trường hợp nếu biểu thức trong ngoặc vuông bằng 0. Do đó

$$\frac{\partial h(t, \tau)}{\partial t} = a(t)h(t, \tau) - h(t, t)c(t)h(t, \tau) = [a(t) - c(t)h(t, t)]h(t, \tau).$$

Lấy đạo hàm ước lượng $\hat{\lambda}(t)$ theo quy tắc Leibniz

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = \int_0^t \frac{\partial h(t, \tau)}{\partial t} x(\tau) d\tau + h(t, t)x(t).$$

Sử dụng biểu thức $\hat{\lambda}(t)$ với thay thế giá trị vừa tìm của $\partial h(t, \tau) / \partial t$, nhận được PTVP

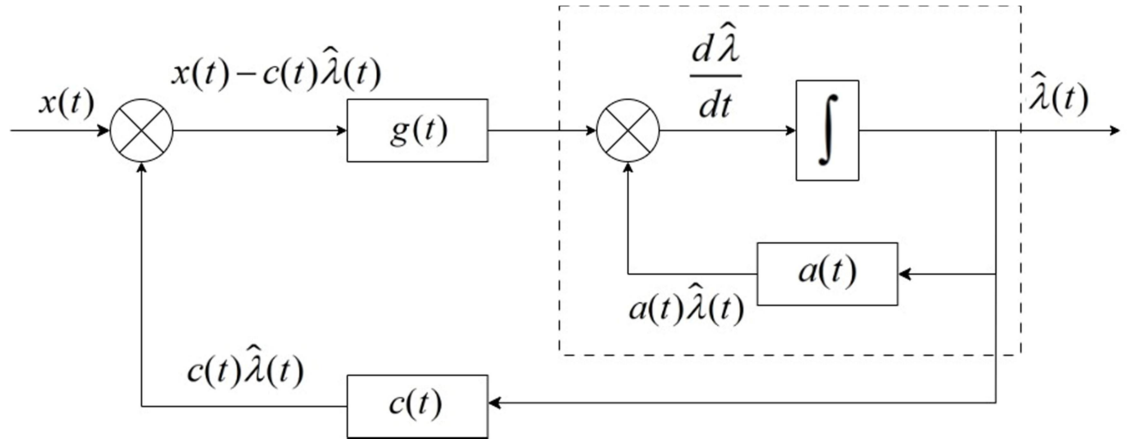
$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = [a(t) - c(t)h(t, t)]\hat{\lambda}(t) + h(t, t)x(t).$$

Viết đầy đủ dạng PTVP của bộ lọc Kalman

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = a(t)\hat{\lambda}(t) + g(t)[x(t) - c(t)\hat{\lambda}(t)], \quad \hat{\lambda}(0) = \lambda_0, \quad (1.9)$$

Trong đó $h(t, t)$ - Hệ số khuếch đại của bộ lọc Kalman.

Từ PTVP mô tả lọc Kalman, nhận được sơ đồ cấu trúc lọc Kalman sau



Hình 1-2: Sơ đồ cấu trúc lọc Kalman

1.3. Hệ số khuếch đại lọc Kalman

Theo nguyên tắc trực giao (sai số trực giao với lượng vào của bộ lọc)

$$E[e(t)x(\alpha)] = 0,$$

Khi đó:

$$E(e_t x_\alpha) = E(\lambda_t x_\alpha) - E(\hat{\lambda}_t x_\alpha) = 0.$$

Suy ra, có được biểu thức sau

$$E[\lambda(t)x(t)] = E[\hat{\lambda}(t)x(t)].$$

Thay thế phương trình quan sát ở vế trái, biểu thức ước lượng $\hat{\lambda}(t)$ (ở dạng tích phân), nhận được

$$\begin{aligned} c(t)E[\lambda^2(t)] &= \int_0^t h(t, \tau) E[x(t)x(\tau)] d\tau = \\ &= \int_0^t h(t, \tau) E\{[c(t)\lambda(t) + n(t)][c(\tau)\lambda(\tau) + n(\tau)]\} d\tau = \\ &= \int_0^t h(t, \tau) \{c(t)c(\lambda)E[\lambda(t)\lambda(\tau)] + S_0(t)\delta(\tau - t)\} d\tau \end{aligned}$$

Theo tính lọc của hàm Delta và $c(\tau)\lambda(\tau) = x(\tau) - n(\tau)$, suy ra

$$\begin{aligned}
c(t)E[\lambda^2(t)] &= S_0(t)h(t,t) + \int_0^t h(t,\tau)E\{c(t)\lambda(t)[x(\tau) - n(\tau)]\}d\tau \\
&= S_0(t)h(t,t) + E\left[c(t)\lambda(t)\int_0^t h(t,\tau)x(\tau)d\tau\right] = \\
&= S_0(t)h(t,t) + c(t)E[\lambda(t)\hat{\lambda}(t)].
\end{aligned}$$

Như vậy

$$c(t)E[\lambda^2(t)] = c(t)E[\lambda(t)\hat{\lambda}(t)] + S_0(t)h(t,t).$$

Thay thế vào vế trái, vế phải ở biểu thức trên thành phần $\lambda(t) = e(t) + \hat{\lambda}(t)$, và điều kiện trực giao $E(e_i \hat{\lambda}_i) = 0$, kết quả

$$c(t)E(e_i^2) + c(t)E[\hat{\lambda}(t)]^2 = c(t)E[\lambda^2(t)] + S_0(t)h(t,t), \text{ hoặc}$$

$$c(t)D(t) = S_0(t)g(t),$$

Trong đó: $D(t) = E(e^2(t))$ - phương sai của sai số; $g(t) = h(t,t)$ - hàm trọng lượng xung của bộ lọc (hệ số khuếch đại)

Nên hệ số khuếch đại cần tìm có dạng

$$g(t) = D(t)c(t) / S_0(t). \quad (1.10)$$

Tiếp theo, cần tìm phương trình phương sai của sai số. Ta biết PTVP của sai số

$$\frac{de}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\hat{\lambda}}{dt},$$

Trong đó: $d\lambda/dt = a(t) + v(t)$ = phương trình bộ LTH.

Triển khai PTVP bộ lọc Kalman với mô tả rõ các thành phần

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\lambda}}{dt} &= a(t)\hat{\lambda}(t) + g(t)[x(t) - c(t)\hat{\lambda}(t)] = a(t)\hat{\lambda}(t) - g(t)c(t)\hat{\lambda}(t) + \\
&\quad + g(t)[c(t)\lambda(t) + n(t)] = a(t)\hat{\lambda}(t) + g(t)c(t)e(t) + g(t)n(t).
\end{aligned}$$

Nhận được PTVP sai số

$$\frac{de}{dt} = [a(t) - g(t)c(t)]e(t) + v(t) - g(t)n(t).$$

Như đã biết

$$\dot{x} = Ax + Fv(t) + Gn(t),$$

Trong đó: $v(t)$, $n(t)$ -các QTNN tạp trắng; $F, G = \text{const}$; $A = A(t)$;

$$R_v(t - \tau) = q_v(t)\delta(t - \tau); \quad R_n(t, \tau) = S_0(t)\delta(t - \tau).$$

PTVP của phương sai QTNN $x(t)$

$$dD_x / dt = 2AD_x(t) + F^2 q_v(t) + G^2 S_0(t). \quad (1.11)$$

Nên tương tự cho PTVP sai số, tìm được $A = a(t) - g(t)c(t)$, khi đó

$$\frac{dD}{dt} = 2[a(t) - g(t)c(t)]D + q_v(t) + g^2(t)S_0(t). \quad (1.12)$$

Sau khi biến đổi có tính đến giá trị hệ số khuếch đại $g(t)$, nhận được PTVP của phương sai của sai số

$$\frac{dD}{dt} = 2a(t)D - c^2(t)\frac{D^2}{S_0(t)} + q_v(t). \quad (1.13)$$

PTVP (1.13) là PTVP phi tuyến mang tên Riccati, về tổng quát được giải theo phương pháp tích phân số. Nghiệm $D(t)$ cho phép tính hệ số khuếch đại $g(t)$, và xác định đầy đủ cấu trúc bộ lọc Kalman.

Nhận xét. Nếu PTVP của bộ LTH có dạng

$$\frac{d\lambda}{dt} = a(t)\lambda(t) + b(t)v(t), \quad (1.14)$$

thì PTVP của phương sai (1.13) sẽ có mô tả

$$\frac{dD}{dt} = 2a(t)D - c^2(t)\frac{D^2}{S_0(t)} + b^2(t)q_v(t). \quad (1.15)$$

1.4. Tính toán Lọc Kalman vô hướng

Quy trình tính toán bộ lọc Kalman sẽ được xây dựng theo các dạng ứng dụng cụ thể với hiểu ý nghĩa và xác định từng thành phần trong lọc Kalman.

1.4.1. Trường hợp ứng dụng 1. Giả sử biết hàm tương quan tín hiệu hữu ích $\lambda(t)$ là $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 e^{-\alpha|\tau|}$. Trước tiên, cần tìm hệ số $\alpha(t)$ của lọc tạo hình.

Các bước tính toán. Từ dạng hàm tương quan, suy ra LTH là hệ dừng; tạp tạo hình $v(t)$ - là tạp trắng ngẫu nhiên dừng; $q_v = \text{const}$. Tìm hàm truyền đạt LTH từ biểu thức $S_\lambda = S_v(\omega)H(s)H(-s) = q_v |H(s)|^2$

Biết biến đổi Fourier của hàm $e^{-\alpha|\tau|}$

$$\Im[e^{-\alpha|\tau|}] = 2\alpha / (\alpha^2 + \omega^2)$$

Nên phổ tín hiệu $\lambda(t)$

$$S_\lambda(\omega) = 2\sigma_\lambda^2 \alpha / (\alpha^2 + \omega^2)$$

Biểu diễn $S_\lambda(\omega)$ dưới dạng tích

$$S_\lambda(\omega) = 2\sigma_\lambda^2 \alpha / [(\alpha - i\omega)(\alpha + i\omega)] = 2\sigma_\lambda^2 \alpha / [(\alpha - s)(\alpha + s)]$$

Nếu đặt $H(s) = 1 / (\alpha + s)$, thì thay ký hiệu s bằng $p = d/dt$, và vận dụng biểu thức: $\left(\alpha + \frac{d}{dt}\right)\lambda = v(t)$

Nhận được PTVP của LTH

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\alpha\lambda + v(t). \quad (1.16)$$

Như vậy, $a = -\alpha = \text{const}$; $q_v = 2\alpha\sigma_\lambda^2$.

Thông số α có ý nghĩa vật lý là độ rộng phổ hiệu dụng năng lượng $\Delta_{\omega\lambda}$ khi truyền tin λ , như vậy các thành phần hệ số truyền LTH, mật độ phổ q_v của tạp tạo hình $v(t)$ được xác định bằng cách tính phương sai thông tin truyền σ_λ^2 và hệ số α .

1.4.2. Trường hợp ứng dụng 2. Giải phương trình Riccati (1.13), nếu giả định $dD/dt = 0$ (trường hợp Lọc Kalman dừng); cần tìm các thông số lọc Kalman và hàm truyền đạt có tính đến các kết quả mục ứng dụng 1.4.1.

Các bước tính toán.

Khi $dD/dt = 0$, phương trình Riccati bị suy biến thành phương trình đại số sau (trường hợp $a = -\alpha$)

$$c^2 D^2 + 2\alpha S_0 D - S_0 q_v = 0.$$

Giả sử $c = 1$, ta có

$$D = -\alpha S_0 + \sqrt{\alpha^2 S_0^2 + S_0 q_v} = \alpha S_0 (\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1),$$

Trong đó: $A_1 = q_v / \alpha^2 S_0$.

Lúc này, biểu thức của hệ số khuếch đại hệ dừng $g(t) = g$ có dạng

$$g = \frac{D}{S_0} = \alpha (\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1).$$

Theo ứng dụng 1.4.1., $q_v = 2\alpha\sigma_\lambda^2$; $a = -\alpha$, nên

$$\Lambda_1 = q_v / \alpha^2 S_0 = q_v / a^2 S_0 = 2\sigma_\lambda^2 / \alpha S_0.$$

Viết PTVP ước lượng (1.9) dưới dạng

$$[d/dt + (g + \alpha)]\hat{\lambda} = gx.$$

Từ đây, hàm truyền đạt của Lọc Kalman

$$H(s) = \frac{g}{s + (g + \alpha)} = \frac{k_0}{1 + sT},$$

Trong đó: $k_0 = g / (g + \alpha)$; $T = 1 / (g + \alpha)$.

Như vậy, lọc Kalman dùng tương đương với mạch điện (khâu quán tính) có hằng số thời gian T , được mắc nối tiếp với bộ khuếch đại có hệ số khuếch đại k_0 .

Thay biểu thức k_0 và T , tính được $g + \alpha = \alpha\sqrt{1 + \Lambda_1}$. Khi đó

$$k_0 = (\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1) / \sqrt{1 + \Lambda_1}$$

So sánh các thông số này với các thông số lọc Winer, ta tìm được $2\sigma_\lambda^2 = D_s / S_0$ và $\Lambda_1 = \Lambda = D_s / S_0$.

Như dự kiến cho hệ dùng, các hàm truyền đạt của lọc Kalman và lọc Winer là trùng nhau. Khác biệt chỉ ở chỗ, lọc Kalman có cấu trúc được thực hiện ở dạng hệ với phản hồi và như thế sẽ dễ dàng hơn trong mô hình thuật toán hóa trên máy tính số.

1.4.3. Trường hợp ứng dụng 3. Xét trường hợp hỗn hợp của tín hiệu và tạp nhiễu: $x(t) = \lambda(t)\sin\omega_0 t + n(t)$,

Mô hình thông tin xác định theo PTVP

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\alpha\lambda + v(t).$$

Hãy tìm sơ đồ Lọc Kalman.

Các bước tính toán. Khi so sánh kênh quan sát (1.1) và thông tin hữu ích (1.2), có thể thấy

$$c(t) = \sin\omega_0 t; \quad a(t) = -\alpha = \text{const}; \quad q_v(t) = q_v = \text{const}; \quad S_0(t) = S_0 = \text{const}.$$

Phương trình xác định ước lượng (1.9), thay thế

$$g(t) = c(t)D / S_0 = (D / S_0)\sin\omega_0 t \text{ nhận được tích:}$$

$$g(t)c(t)\hat{\lambda}(t) = (D / S_0)\hat{\lambda}(t)\sin^2 \omega_0 t$$

Sau khi bỏ qua thành phần chứa hài bậc hai $\sin^2 \omega_0 t$, nhận được dạng PTVP gần đúng xác định ước lượng cận tối ưu của lọc Kalman (với điều kiện thỏa mãn $\tau_k = 1 / \alpha \gg \tau = 2\pi / \omega_0$)

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = -\alpha\hat{\lambda} + \frac{D}{2S_0} \left[2x(t)\sin \omega_0 t - \hat{\lambda} \right].$$

Phương trình phương sai gần đúng (bỏ thành phần chứa hài bậc hai $\sin^2 \omega_0 t$)

$$\frac{dD}{dt} = -2\alpha D + q_v - \frac{D^2}{2S_0}, \quad (1.17)$$

Trong đó theo dữ liệu ứng dụng 1.4.1. thì $q_v = 2\alpha\sigma_\lambda^2$.

Kết quả, PTVP lọc Kalman có dạng:

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} + \left(\alpha + \frac{D}{2S_0} \right) \hat{\lambda} = \frac{D}{S_0} x(t)\sin \omega_0 t$$

Từ đó

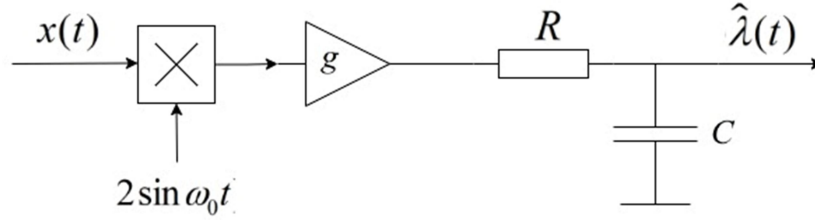
$$\hat{\lambda} = \left(\frac{D}{S_0} x(t)\sin \omega_0 t \right) / \left(d / dt + \left(\alpha + \frac{D}{2S_0} \right) \right) = x(t)2\sin \omega_0 t g / (1 + T d / dt)$$

Chuyển PTVP trên về dạng toán tử Laplace (để có hàm truyền đạt), thay $d / dt = s$

$$\hat{\lambda} = x(t)(2\sin \omega_0 t)g / (1 + Ts)$$

Trong đó: $g = D / 2S_0$ - hệ số khuếch đại; $T = 1 / \alpha_\Phi$ - hằng số thời gian; $\alpha_\Phi = \alpha + D / 2S_0$.

Để thấy, ở đây lọc Kalman thực hiện xử lý: cho tín hiệu quan sát $x(t)$ qua khâu nhân với $2\sin \omega_0 t$ và mạch quán tính – bộ lọc thấp tần $g / (1 + Ts)$, để có ước lượng $\hat{\lambda}$, xem sơ đồ cấu trúc Hình 1-3



Hình 1-3: Sơ đồ nguyên lý lọc Kalman

1.4.4. Trường hợp ứng dụng 4. Xét PTVP thông tin và PTVP kênh quan sát dạng

$$\frac{d\lambda}{dt} = f\lambda(t) + gv(t); \quad x(t) = h\lambda(t) = n(t)$$

Trong đó: f, g, h – các đại lượng tiền định vô hướng; $\lambda_0(t)$ – đại lượng ngẫu nhiên có trung bình xác suất $E[\lambda_0(t)] = \bar{\lambda}_0$ với phương sai $D_0 = \Lambda$; $n(t), v(t)$ – các tạp trắng dừng không tương quan có kỳ vọng bằng 0 và phương sai $R_n(\tau) = r\delta(\tau)$, $R_v(\tau) = q\delta(\tau)$; $r, q = \text{const}$. Đại lượng $\lambda_0(t)$ không tương quan với $n(t), v(t)$.

Hãy tìm PTVP lọc Kalman, PTVP phương sai của sai số và giải PTVP Riccati.

Các bước tính toán. Đặt $a(t) = f$; $c(t) = h$; $S_0 = r$; $q_v = q$; $b = q$; $D(t) = p(t)$; $g(t) = k(t)$ (hệ số khuếch đại), theo các kết quả ở trên, nhận được thuật toán lọc Kalman, bao gồm:

- Thuật toán tính ước lượng tối ưu Kalman

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = f\hat{\lambda} + k(t)[x(t) - h\hat{\lambda}(t)], \quad \lambda(t_0) = \bar{\lambda}; \quad k(t) = \frac{hp(t)}{r}; \quad (1.18a)$$

- Thuật toán tính phương sai của sai số lọc Kalman

$$\frac{dp}{dt} = 2fp(t) - \frac{h^2}{r}p^2(t) + g^2q; \quad p(t_0) = \sigma_0^2. \quad (1.18b)$$

Có thể viết (1.18b) dưới dạng

$$\frac{dp}{p^2(t) - 2(r/h^2)fp(t) - (r/h^2)g^2q} = -\frac{h^2}{r}dt$$

Ký hiệu ρ_1, ρ_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$p^2 - 2\frac{r}{h^2}fp - \frac{r}{h^2}g^2q = 0$$

Nhận được

$$\rho_{1,2} = \frac{r}{h^2} f \pm \sqrt{\frac{r^2}{h^4} f^2 + \frac{r}{h^2} g^2 q}$$

Như vậy PTVP Riccati sẽ có dạng

$$\frac{dp}{(p - \rho_1)(p - \rho_2)} = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \left[\frac{dp}{p - \rho_1} - \frac{dp}{p - \rho_2} \right] = -\frac{h^2}{r} dt,$$

Hoặc

$$\left[\frac{1}{p - \rho_1} - \frac{1}{p - \rho_2} \right] dp = -2\mu dt,$$

Trong đó

$$2\mu = \frac{h^2}{r}(\rho_1 - \rho_2) = \frac{h^2}{r} 2\sqrt{\frac{r^2}{h^4} f^2 + \frac{r}{h^2} g^2 q} = 2\sqrt{f^2 + h^2 g^2 \frac{q}{r}}$$

Sau khi lấy tích phân

$$\int_{p(t_0)}^{p(t)} \left[\frac{1}{p - \rho_1} - \frac{1}{p - \rho_2} \right] dp = -2\mu \int_{t_0}^t dt$$

Suy ra

$$\ln \left| \frac{p(t) - \rho_1}{p(t) - \rho_2} \cdot \frac{p(t_0) - \rho_2}{p(t_0) - \rho_1} \right| = -2\mu(t - t_0)$$

Kết quả, tìm được nghiệm PTVP Riccati

$$p(t) = \frac{\rho_1 - \rho_2 C_0 e^{-2\mu(t-t_0)}}{1 - C_0 e^{-2\mu(t-t_0)}}; \quad t \geq 0; \quad (1.19)$$

$$C_0 = \frac{p(t_0) - \rho_1}{p(t_0) - \rho_2} = \frac{\sigma_0^2 - \rho_1}{\sigma_0^2 - \rho_2}.$$

Ở trạng thái thiết lập (hệ dừng, khi $t \rightarrow \infty$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_\infty = \rho_1 = \frac{r}{h^2} f + \sqrt{\frac{r^2}{h^4} f^2 + \frac{r}{h^2} g^2 q}$$

Như vậy giá trị thiết lập của phương sai không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu $p(t_0) = \sigma_0^2$. Đặt $f = -\alpha$; $\alpha > 0$, ta có giá trị xác lập cho bộ lọc tạo hình ổn định

$$p_\infty = \frac{\alpha r}{h^2} (\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1), \quad (1.20)$$

Trong đó: $\Lambda_1 = g^2 q h^2 / r \alpha^2$.

Theo PTVP của LTH, nhận được [xem (1.11)]

$$\frac{dD_\lambda}{dt} = 2fD_\lambda + g^2 q.$$

Từ đó, ở chế độ xác lập ($f = -\alpha$), ta có

$$D_\lambda = g^2 q / 2\alpha. \quad (1.21)$$

Theo (1.1), thành phần tín hiệu $s(t) = h\lambda(t)$, do vậy công suất tín hiệu

$$D_s = \sigma_0^2 = h^2 D_\lambda = h^2 q g^2 / 2\alpha, \text{ nên } \Lambda_1 = 2D_s / r \alpha.$$

Độ rộng phổ hiệu dụng một phía của nhiễu bằng $2r$, độ rộng phổ hiệu dụng của thông tin $\lambda = \lambda(t)$ bằng $\alpha / 4$ (Hz), do vậy $\Lambda_1 = D_s / p$, trong đó p - là công suất nhiễu trong dải thông tần hiệu dụng của thông tin. Như vậy, Λ_1 - mức cường độ phổ nhiễu trong bộ lọc Kalman. Từ (1.20) có tính đến đẳng thức $\alpha r / h^2 = 2D_\lambda / \Lambda_1$, nhận được

$$p_\infty = (2D_\lambda / \Lambda_1)(\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1)$$

Khi $\Lambda_1 \rightarrow 0$, thì $p_\infty \rightarrow D_\lambda$; khi $\Lambda_1 \rightarrow \infty$, thì $p_\infty \rightarrow 0$.

Tìm hàm truyền đạt của lọc Kalman. Từ PTVP lọc Kalman, ta có

$$H_{\hat{\lambda}}(s) = \frac{k}{s + (\alpha + hk)} = \frac{k_0}{1 + sT_0}, \quad (1.22)$$

Trong đó: $k_0 = \frac{k}{\alpha + hk}$; $T_0 = \frac{1}{\alpha + hk}$, lưu ý $\alpha + hk = \alpha + \frac{h^2}{r} p_\infty = \alpha \sqrt{1 + \Lambda_1}$

$$\text{Khi đó } k_0 = \frac{k}{\alpha \sqrt{1 + \Lambda_1}} = \frac{p_\infty h / r}{\alpha \sqrt{1 + \Lambda_1}} = \frac{\frac{\alpha r}{h^2} (\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1) \frac{h}{r}}{\alpha \sqrt{1 + \Lambda_1}} = \frac{\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1}{h \sqrt{1 + \Lambda_1}}$$

Như vậy, hàm truyền đạt lọc Kalman theo tín hiệu

$$H_s(s) = hH_{\hat{\lambda}}(s) = \frac{hK_0}{1 + sT_0} = \frac{K_1}{1 + sT_0}; \quad T_0 = \frac{1}{\alpha \sqrt{1 + \Lambda_1}};$$

$$\lim_{\Lambda_1 \rightarrow \infty} T_0 = 0; \quad \lim_{\Lambda_1 \rightarrow \infty} T_0 = 1 / \alpha; \quad \lim_{\Lambda_1 \rightarrow \infty} K_1 = 1; \quad \lim_{\Lambda_1 \rightarrow 0} K_1 = 0.$$

Trong hiện thực hóa thực tế các thuật toán lọc tối ưu, đôi khi còn lồng vào thêm yêu cầu độ nhạy của đặc tính lọc tối ưu đối với sự chênh lệch các thông số so với các giá trị định chuẩn nhận được ở kết quả từ bài toán tổng hợp. Điều này liên quan

tới các vấn đề sau, thứ nhất, do không biết trước chính xác một số dữ liệu ban đầu (ví dụ, độ rộng phổ tần truyền bản tin, cường độ phổ nhiễu). Thứ hai, các thông số này có thể thay đổi trong quá trình làm việc. Thứ ba, đôi khi chỉ có thể thực hiện gần đúng các thông số tính toán của bộ lọc tối ưu. Trong tất cả các tình huống tương tự, cần ưu tiên xét sự ảnh hưởng của độ chênh lệch các thông số bộ lọc (so với giá trị tối ưu) lên độ chính xác khôi phục (lọc) thông tin hữu ích.

Nhiều công trình, đưa ra đánh giá đầy đủ độ nhạy của các thuật toán lọc tuyến tính tối ưu, song để bước đầu hiểu được cách tính độ nhạy của bộ lọc, ta xét một ví dụ đơn giản, khi phương trình tiên định của thông tin có dạng (1.1), (1.2) với $c = 1$; $a = -\alpha$.

Ta giả định, hệ số khuếch đại k là hằng số. Theo (1.10), tính được phương sai của ước lượng ở chế độ dừng

$$D = \frac{k^2 S_0 + q_v}{2(\alpha + k)}. \quad (1.23)$$

Từ (1.24) có thể chỉ ra các giới hạn được phép khi thay đổi k . Dễ thấy, giá trị cực tiểu của phương sai nhận được từ điều kiện $dD/dk = 0$, suy ra

$$k_m = \alpha \left(\sqrt{1 + \frac{q_v}{\alpha^2 S_0}} - 1 \right) = \alpha (\sqrt{1 + 2q} - 1), \quad (1.24)$$

Trong đó: $q = \frac{D_c}{\alpha S_0}$; $D_c = \frac{q_v}{2\alpha}$ - phương sai của ước lượng tin hữu ích; q - tỉ số tín/ tạp.

Biến đổi (1.24)

$$D = \frac{\frac{k^2 S_0}{2\alpha} + 1}{1 + k/\alpha} = D_c \frac{\gamma^2 \frac{S_0}{2\alpha} k_m^2 + 1}{1 + \gamma k_m/\alpha},$$

Trong đó: $\gamma = k/k_m$. Suy ra

$$\beta(\gamma) = \frac{D}{D_c} = \frac{\gamma^2 \frac{1}{2q} (\sqrt{1 + 2q} - 1)^2 + 1}{1 + \gamma (\sqrt{1 + 2q} - 1)}$$

Như vậy, khi $\gamma = 0, \beta = 1$. Cần tìm giá trị β khi $\gamma = 1$

$$\begin{aligned}\beta(1) &= \frac{\frac{1}{2q}(\sqrt{1+2q}-1)^2 + 1}{\sqrt{1+2q}} = \frac{\frac{1+2q}{1} - \frac{1}{q}\sqrt{1+2q}}{\sqrt{1+2q}} = \\ &= \frac{1}{q} \frac{\sqrt{1+2q}(\sqrt{1+2q}-1)}{\sqrt{1+2q}} = \frac{1}{q}(\sqrt{1+2q}-1) = \frac{1}{\alpha q} k_m.\end{aligned}\quad (1.25)$$

Trường hợp cường độ phổ nhiễu nhỏ ($q \ll 1$)

$$\beta(1) \approx 1 - q/2;$$

Trường hợp cường độ phổ nhiễu lớn

$$\beta(1) \approx \sqrt{2/q}.$$

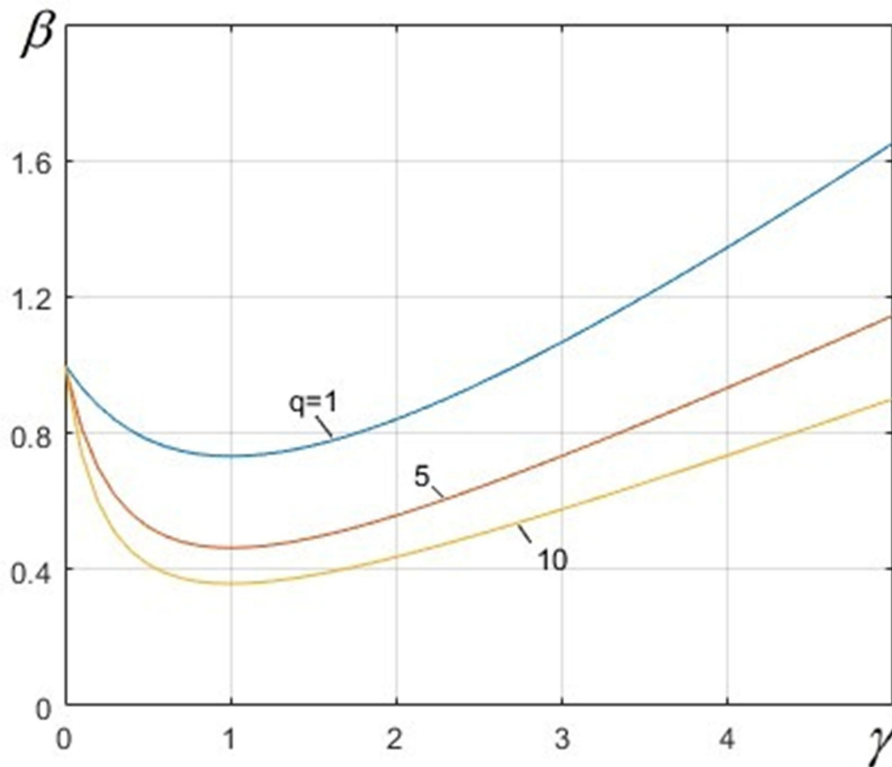
α

Theo (1.25)

$$D(k_m) = D = \left(\frac{D_c}{\alpha q} \right) k_m = S_0 k_m.$$

Do đó, như dự kiến $k_m = \frac{D}{S_0}$, biểu thức này trùng với (1.10). Mỗi phụ thuộc

$\beta = \beta(\gamma)$ được thể hiện trên Hình 1-4 với $q = 1; 5; 10$



Hình 1-4: Đồ thị sự phụ thuộc thông số β vào γ khi cường độ nhiễu thay đổi

Lưu ý, đối với các hệ tuyến tính bậc cao, cần kiểm soát di chuyển quỹ đạo nghiệm phương trình đặc trưng phụ thuộc vào sự thay đổi thông số, sao cho sự di chuyển này không làm hệ mất ổn định. Nhưng cũng cần biết rằng đối với hệ phi tuyến, áp dụng phương pháp này gặp nhiều khó khăn, do không kếp kín được việc lấy được tích phân (không khả tích phân) của đầy đủ các phương trình.

Như vậy, trong chương 1, tôi đã trình bày tổng quan về lọc Kalman vô hướng tín hiệu liên tục, bao gồm cơ sở lý thuyết, phương trình cơ bản và phương pháp tính toán. Nội dung này cung cấp nền tảng quan trọng cho việc hiểu và áp dụng bộ lọc Kalman trong các hệ thống đơn giản.

Tuy nhiên, trong thực tế, hầu hết các hệ thống đều có nhiều chiều và yêu cầu mô hình hóa dưới dạng ma trận để phản ánh đầy đủ trạng thái và mối quan hệ giữa các biến. Do đó, việc mở rộng từ lọc Kalman vô hướng sang lọc Kalman liên tục đa chiều là cần thiết để giải quyết các bài toán phức tạp hơn.

Chương 2 sẽ tiếp tục đi sâu vào việc xây dựng phương pháp tính toán lọc Kalman liên tục nhiều chiều, qua đó mở rộng và hoàn thiện cơ sở lý thuyết đã đề cập trong chương 1.

CHƯƠNG 2: LỘC KALMAN LIÊN TỤC NHIỀU CHIỀU (DẠNG MA TRẬN)

Trong thực tế, nhiều hệ thống vật lý và kỹ thuật có bản chất phức tạp, bao gồm nhiều biến trạng thái liên quan chặt chẽ với nhau. Việc mô hình hóa và xử lý các hệ thống này đòi hỏi phải mở rộng từ dạng vô hướng (scalar) sang dạng ma trận (matrix) để có thể phản ánh đầy đủ các mối quan hệ giữa các thành phần. Lọc Kalman liên tục nhiều chiều là một công cụ mạnh mẽ để giải quyết bài toán này. Với khả năng ước lượng trạng thái của các hệ thống đa biến trong thời gian thực, bộ lọc Kalman dạng ma trận được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực như điều khiển tự động, robot, hàng không, và các hệ thống truyền thông.

Chương này sẽ tập trung phát triển phương pháp tính toán lọc Kalman tín hiệu liên tục trong không gian nhiều chiều, bắt đầu từ việc thiết lập các phương trình cơ bản dưới dạng ma trận, sau đó trình bày chi tiết phương pháp tính toán

2.1. Phương trình Lọc Kalman nhiều chiều

Xét các phương trình mô tả mô hình thông tin (hữu ích) $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$

$$\frac{d\lambda}{dt} = F(t)\lambda(t) + G(t)w(t); \quad (2.1)$$

và mô hình kênh quan sát $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$

$$x(t) = H(t)\lambda(t) + v(t), \quad (2.2)$$

Trong đó: $w(t)$ - tập trắng $(r \times 1)$ chiều tạo hình tín hiệu hữu ích; $F(t)$ - ma trận lọc tạo hình kích cỡ $(n \times n)$; $G(t)$ - ma trận đầu vào $(n \times r)$ chiều; $H(t)$ - ma trận quan sát $(n \times m)$ - chiều.

Giả sử cũng đúng các biểu thức:

$$\begin{aligned} E(w_t) &= 0; & E(w_t w_\tau^T) &= Q(t)\delta(t - \tau); \\ E(v_t) &= 0; & E(v_t v_\tau^T) &= S_0(t)\delta(t - \tau), \end{aligned} \quad (2.3)$$

Trong đó: $\delta(t - \tau)$ - hàm delta δ ; $Q(t)$ và $S_0(t)$ - các ma trận xác định dương đối xứng $(r \times r)$ và $(m \times m)$.

Các tập trắng w_t , v_t là không tương quan với nhau, nên thỏa mãn:

$$R_{wv}(t, \tau) = E(w_t v_\tau^T) = 0.$$

và do đó w_t , v_t cũng không tương quan với điều kiện ban đầu tín hiệu hữu ích ngẫu nhiên $\lambda(0) = \lambda_0$; $(E(\lambda_0) = 0)$,

$$E(\lambda_0 w_t^T) = 0; \quad E(\lambda_0 v_t^T) = 0,$$

$$\text{ngoài ra: } E(w_t x_\alpha^T) = 0; \quad E(v_t x_\alpha^T) = 0, \quad (2.4)$$

Các quá trình ngẫu nhiên $\lambda(t)$, $v(t)$ cũng không tương quan, nên $E(v_t x_\alpha^T) = 0$,

Cần tìm bộ lọc tối ưu nhiều chiều cho phép tạo ước lượng không lệch cho tín hiệu hữu ích với tối thiểu hóa bình phương sai số $e_t = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t)$.

Quy trình xây dựng bộ lọc Kalman dạng ma trận – véc tơ cũng tương tự như trường hợp vô hướng

$$\Phi_{\lambda x}(t, \alpha) = \int_0^t K(t, \tau) \Phi_x(\tau, \lambda) d\tau, \quad t > \tau, \alpha > 0 \quad (2.5)$$

Trong đó: $\Phi_{\lambda x}(t, \alpha) = E[\lambda(t)x^T(\alpha)]$ - ma trận tương quan chéo giữa $\lambda(t)$ và $x(\alpha)$

$\Phi_x(\tau, \alpha) = E[x(\tau)x^T(\alpha)]$ - ma trận tự tương quan của tín hiệu quan sát;
 $K(t, \tau)$ - ma trận trọng số của bộ lọc.

Lấy đạo hàm các phần bên trái và bên phải phương trình (2.5). Cụ thể, đạo hàm về trái

$$E\left\{\frac{d}{dt}[\lambda(t)x^T(\alpha)]\right\} = E[\dot{\lambda}(t)x^T(\alpha)].$$

Thế giá trị đạo hàm $\dot{\lambda}(t)$ vào vế phải biểu thức trên, nhận được

$$E\left\{\frac{d}{dt}[\lambda(t)x^T(\alpha)]\right\} = F(t)E[\lambda(t)x^T(\alpha)] + G(t)E[w(t)x^T(\alpha)].$$

Lưu ý (2.4), đạo hàm về trái có kết quả

$$\frac{d}{dt}E[\lambda(t)x^T(\alpha)] = F(t)E[\lambda(t)x^T(\alpha)]. \quad (2.6)$$

Theo quy tắc Leibnis, đạo hàm về phải (2.5) có dạng

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t K(t, \tau) \Phi_x(\tau, \alpha) d\tau = \int_0^t \frac{\partial K(t, \tau)}{\partial t} \Phi_x(\tau, \alpha) d\tau + K(t, t) \Phi_x(t, \alpha), \quad (2.7)$$

$$t > \alpha > 0$$

Thành phần trong số hạng thứ hai

$$\Phi_x(t, \alpha) = E[x(t)x^T(\alpha)].$$

Sử dụng (2.2), suy ra

$$\Phi_x(t, \alpha) = E \left\{ [H(t)\lambda(t) + v(t)]x^T(\alpha) \right\} = H(t)E \left[\lambda(t)x^T(\alpha) \right] \quad (2.8)$$

bởi vì theo (2.4) thì $E[v(t)x^T(\alpha)] = 0$.

Ta thấy rằng, (2.8) là tích của vế trái (2.5) nhân với ma trận quan sát $H(t)$. Còn (2.6) là tích của vế trái (2.5) nhân với $F(t)$.

Khi thể hiện $\Phi_{\lambda x}(t, \alpha)$ qua tích phân vế phải (2.5) có tính đến đạo hàm (2.6), nhận được

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{\lambda x}(t, \alpha)}{\partial t} &= F(t)\Phi_{\lambda x}(t, \alpha) = F(t) \int_0^t K(t, \tau)\Phi_x(\tau, \lambda)d\tau = \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} K(t, \tau)\Phi_x(\tau, \lambda)d\tau + K(t, t)H(t) \int_0^t K(t, \tau)\Phi_x(\tau, \lambda)d\tau \end{aligned}$$

Hoặc

$$\int_0^t \left[F(t)K(t, \tau) - \frac{\partial}{\partial t} K(t, \tau) - K(t, t)H(t)K(t, \tau) \right] \Phi_x(\tau, \lambda)d\tau = 0$$

Từ đó, do dạng ma trận $\Phi_x(\tau, \lambda)$ có thể bất kỳ, suy ra biểu thức trong ngoặc vuông phải bằng 0

$$F(t)K(t, \tau) - \frac{\partial}{\partial t} K(t, \tau) - K(t, t)H(t)K(t, \tau) = 0 \quad (2.9)$$

Biểu diễn ước lượng $\hat{\lambda}(t)$ qua tín hiệu quan sát (lượng vào bộ lọc)

$$\hat{\lambda}(t) = \int_0^t K(t, \tau)x(\tau)d\tau. \quad (2.10)$$

Lấy đạo hàm hai vế trái và phải (2.10) (sử dụng quy tắc Leibniz)

$$\frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} K(t, \tau)x(\tau)d\tau + K(t, t)x(t). \quad (2.11)$$

Theo (2.9), có đạo hàm riêng

$$\frac{\partial}{\partial t} K(t, \tau) = F(t)K(t, \tau) - K(t, t)H(t)K(t, \tau)$$

Thế giá trị này vào vế phải (2.11), nhận được

$$\frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = F(t) \int_0^T K(t, \tau) x(\tau) d\tau - K(t, t) H(t) \int_0^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau + K(t, t) x(t) \quad (2.12)$$

Sử dụng (2.10) cho ước lượng $\hat{\lambda}(t)$, nhận được PTVP lọc Kalman ở dạng ma trận

$$\frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = F(t)\hat{\lambda}(t) + K(t) \left[x(t) - H(t)\hat{\lambda}(t) \right], \quad (2.13)$$

Trong đó: $K(t) = K(t, t)$ - ma trận hệ số khuếch đại bộ lọc Kalman.

Đến đây, ta hoàn thành bước một xây dựng lọc Kalman. Bước hai là tìm biểu thức tính toán ma trận hệ số khuếch đại $K(t)$.

Ta biết sai số lọc

$$e(t) = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t). \quad (2.14)$$

Biểu diễn ma trận tương quan chéo

$$\begin{aligned} E \left[e(t) x^T(\alpha) \right] &= E \left[\lambda(t) x^T(\alpha) \right] - \int_0^t K(t, \tau) x(\tau) x^T(\alpha) d\tau = \\ &= E \left[\lambda(t) x^T(\alpha) \right] - \int_0^t K(t, \tau) E \left[x(\tau) x^T(\alpha) \right] d\tau = 0 \end{aligned}$$

Phần vế phải của biểu thức này bằng 0 do tuân thủ phương trình Winer - Hopf (2.5).

$$\text{Nhận xét:} \text{Đẳng thức } E \left[e(t) x^T(\alpha) \right] = 0 \quad (2.15)$$

là dạng tương tự nguyên lý trực giao, và suy ra từ nguyên lý này ở dạng nhiều chiều

$$E \left[e(t) \hat{\lambda}^T(\alpha) \right] = 0 \quad (2.16)$$

(do ước lượng $\hat{\lambda}(t)$ theo (2.10) là hàm tuyến tính với $x(t)$).

Khi $\alpha = t$, có tính đến (2.4), ta có

$$E \left[e(t) x^T(t) \right] = E \left[\lambda(t) x^T(t) \right] - E \left[\hat{\lambda}(t) x^T(t) \right] = 0$$

Từ đây, có được đẳng thức

$$E \left[\lambda(t) x^T(t) \right] = E \left[\hat{\lambda}(t) x^T(t) \right].$$

Kết hợp phương trình quan sát (2.2) ở vế trái và ước lượng $\hat{\lambda}(t)$ dưới dạng (2.10), nhận được

$$\begin{aligned} E[\lambda(t)(H(t)\lambda(t))^T] + E[\hat{\lambda}(t)v^T(t)] &= E[\lambda(t)(H(t)\lambda(t))^T] = \\ &= E\left[\left(\int_0^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)x^T(t)\right] = \int_0^t K(t,\tau)E[x(\tau)x^T(t)]d\tau = \\ &= \int_0^t K(t,\tau)E\left\{[H(t)\lambda(t) + v(t)][H(t)\lambda(t) + v(t)]^T\right\}d\tau \end{aligned}$$

Trong đó, theo (2.4) có tính đến $E[\lambda(t)v^T(\alpha)] = 0$. Nếu đẳng thức được tính vào vế phải, và ngoài ra còn đặt $E(vv^T) = S_0(t)\delta(t - \tau)$, ta có

$$\begin{aligned} E[\lambda(t)(H(t)\lambda(t))^T] &= \int_0^t K(t,\tau)E\left\{[H(t)\lambda(t)][H(t)\lambda(t)]^T\right\}d\tau + \\ &\quad + \int_0^t K(t,\tau)S_0(t)\delta(t - \tau)d\tau = \\ &= \int_0^t K(t,\tau)E\left\{x(t)[H(t)\lambda(t)]^T\right\}d\tau + K(t,t)S_0(t) = \\ &= E[\hat{\lambda}(t)(H(t)\lambda(t))^T] + K(t,t)S_0(t). \end{aligned}$$

Ở đẳng thức trên, nếu lại sử dụng biểu thức (2.10) cho ước lượng $\hat{\lambda}(t)$ và lưu ý (2.14), thì $E[e(t)(H(t)\lambda(t))^T] = K(t)S_0(t)$.

Vì $\lambda(t) = e(t) + \hat{\lambda}(t)$, tiếp đó kết hợp phép chuyển vị $(.)^T$, thì

$$\begin{aligned} (H(t)\lambda(t))^T &= \lambda^T(t)H^T(t) = \left[e^T(t) + \hat{\lambda}^T(t)\right]H^T(t) = \\ &= e^T(t)H^T(t) + \hat{\lambda}^T(t)H^T(t). \end{aligned}$$

Tiếp theo, nhận được

$$E[e(t)e^T(t)H^T(t)] + E[e(t)\hat{\lambda}^T(t)]H^T(t) = K(t)S_0(t).$$

Do thành phần thứ hai ở vế trái bằng 0 theo (2.6), nên nhận được

$$E[e(t)e^T(t)]H^T(t) = K(t)S_0(t). \quad (2.17)$$

Ký hiệu ma trận phương sai

$$E[e(t)e^T(t)] = P(t),$$

Thì biểu thức ma trận hệ số khuếch đại sẽ là

$$K(t) = P(t)H^T(t)S_0^{-1}(t). \quad (2.18)$$

Kết quả, ta có PTVP cho ước lượng

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = F(t)\hat{\lambda}(t) + K(t)[x(t) - H(t)\hat{\lambda}(t)]; \quad \hat{\lambda}(t_0) = \hat{\lambda}_0, \quad (2.19)$$

Trong đó: $K(t) = K(t, t)$ - ma trận hệ số khuếch đại; ngoài ra ta biết $K(t, \tau)$ chính là ma trận các hàm trọng lượng của bộ lọc nhiều chiều (ma trận).

Như vậy, còn lại chỉ cần tìm PTVP của ma trận phương sai thì sẽ khép kín được thuật toán lọc Kalman. Theo định nghĩa ma trận này có dạng

$$P = E(e_t e_t^T); \quad e_t = e(t) = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t). \quad (2.20)$$

Sử dụng phương trình tạo tin hữu ích (bộ lọc tạo hình) và phương trình ước lượng, ta có

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= F(t)\lambda + G(t)w(t) - \left\{ F(t)\hat{\lambda}_t + K(t)[x_t - H(t)\hat{\lambda}_t] \right\} = \\ &= Fe_t + Gw_t - Kx_t + KH\hat{\lambda}_t = (F - KH)e_t + Gw_t - Kv_t, \\ F &\equiv F(t); \quad G \equiv G(t); \quad K \equiv K(t); \quad H \equiv H(t). \end{aligned}$$

Như vậy, nhận được PTVP

$$\frac{de_t}{dt} = (F - KH)e_t + Gw_t - Kv_t \quad (2.21)$$

Không khó, ta thấy nghiệm của phương trình này là

$$\begin{aligned} e(t) &= \Phi(t, t_0)e(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)[G(\tau)w(\tau) - K(\tau)v(\tau)]d\tau = \\ &= \Phi(t, t_0)e(t_0) + I_1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Trong đó: $\Phi(t, t_0)$ - ma trận chuyển quá độ (dạng định chuẩn cơ sở), đây là nghiệm của PTVP tuyến tính đồng nhất sau

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = [F(t) - K(t)H(t)]\Phi(t, t_0), \quad (2.23)$$

Lưu ý

$$\Phi(t_0, t_0) = I, \quad (2.24)$$

Ở đây: I - ma trận đơn vị.

Có thể biểu diễn đại lượng

$$e^T(t) = e^T(t_0)\Phi^T(t, t_0) + I_2$$

Trong đó:

$$I_2 = \int_{t_0}^t \left[w^T(\tau)G^T(\tau) - v^T(\tau)K^T(\tau) \right] \Phi^T(t, \tau) d\tau.$$

Khi đó, nhận được

$$\begin{aligned} P &= E(e_t, e^T) = E \left\{ \left[\Phi(t, t_0)e(t_0) + I_1 \right] \left[e^T(t_0)\Phi^T(t, t_0) + I_2 \right] \right\} = \\ &= \Phi(t, t_0)E \left[e(t_0)e^T(t_0) \right] \Phi^T(t, t_0) + I_1 e^T(t_0)\Phi^T(t, t_0) + \Phi(t, t_0)e(t_0)I_2 + I_1 I_2, \end{aligned}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} &\left\{ I_1 e^T(t_0)\Phi^T(t, t_0) \right\} = \\ &= E \left\{ \int_{t_0}^t \Phi(t, t_0) \left[G(\tau)w(\tau)e^T(t_0) - K(\tau)v(\tau)e^T(t_0) \right] \Phi^T(t, t_0) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Theo định nghĩa tính không tương quan của các quá trình $e(t)$, $w(t)$, $v(t)$, suy ra

$$E \left[\hat{w}(\tau)e^T(t_0) \right] = 0; \quad E \left[v(\tau)e^T(t_0) \right] = 0, \quad (2.25)$$

Khi này $I_1 e^T(t_0)\Phi^T(t, t_0) = 0$.

Tiếp theo, có được

$$\Phi(t, t_0)e(t_0)I_2 = \Phi(t, t_0)E \left\{ \int_{t_0}^t e(t_0)w^T(\tau)G^T(\tau) - e(t_0)v^T(\tau)K^T(\tau)\Phi^T(t, \tau) d\tau \right\}.$$

Hàm ma trận tương quan chéo

$$R_{ew}(t_0, \tau) = E \left[e(t_0)w^T(\tau) \right] = R_{we}^T(\tau, t_0),$$

Trong đó: $R_{we}(\tau, t_0) = E \left[w(\tau)e^T(t_0) \right] = 0$.

Tương tự, ta có

$$R_{ev}(t_0, \tau) = E \left[e(t_0)v^T(\tau) \right] = 0$$

Như vậy

$$\Phi(t, t_0)e(t_0)I_2 = 0.$$

Xét tích số

$$\begin{aligned} I_1 I_2 &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \left\{ \Phi(t, \tau) [G(\tau)w(\tau) - K(\tau)v(\tau)] \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ [w^T(\alpha)G^T(\alpha) - v^T(\alpha)K^T(\alpha)] \Phi^T(t, \alpha) \right\} d\alpha d\tau = \\ &= E \left\{ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \begin{bmatrix} G(\tau)w(\tau)w^T(\alpha)G^T(\alpha) - K(\tau)v(\tau)w^T(\alpha)G^T(\alpha) - \\ -G(\tau)w(\tau)v^T(\alpha)K^T(\alpha) + K(\tau)v(\tau)v^T(\alpha)K^T(\alpha) \end{bmatrix} \Phi^T(t, \alpha) d\alpha d\tau \right\} \end{aligned}$$

Do các quá trình $w(t)$, $v(t)$ không tương quan với nhau nên

$$E[w(\tau)v^T(\alpha)] = E[v(\tau)w^T(\alpha)] = 0 \quad (2.26)$$

Ngoài ra, với điều kiện

$$R_w(t, \alpha) = E[w(\tau)w^T(\alpha)] = Q(\tau)\delta(\tau - \alpha); \quad R_v(t, \alpha) = R(\tau)\delta(\tau - \alpha) \quad (2.27)$$

Sử dụng tính chất lọc của hàm Delta, ta có được kết quả

$$\begin{aligned} P &= E(e_t e_t^T) = \Phi(t, t_0) E[e(t_0) e^T(t_0)] \Phi^T(t, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) [G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau) + K(\tau)R(\tau)K^T(\tau)] \Phi^T(t, \tau) d\tau = \\ &= \Phi(t, t_0) \alpha \Phi^T(t, t_0) + I_3, \end{aligned} \quad (2.28)$$

Trong đó: $\alpha = E[e(t_0)e^T(t_0)]$.

Khi thực hiện lấy vi phân tích phân với cận trên biến số theo quy tắc Leinipis

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(t, \tau)] d\tau + \varphi(t, t). \quad (2.29)$$

Trong đó:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(t, \tau) \gamma(t) \Phi^T(t, \tau); \quad \gamma(\tau) = G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau) + K(\tau)R(\tau) \times K^T(\tau).$$

Khi đó

$$\varphi(t, t) = \Phi(t, t) \gamma(t) \Phi^T(t, t)$$

Lưu ý tính chất (2.24), nhận được

$$\varphi(t, t) = \gamma(t) = G(t)Q(t)G^T(t) + K(t) + R(t)K^T(t) \quad (2.30)$$

Tiếp theo chỉ còn xét hai thành phần trong đạo hàm

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\Phi(t, \tau) \alpha \Phi^T(t, \tau) \right] + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(t, \tau)] d\tau + \gamma(t). \quad (2.31)$$

và tính chất (2.23), thì thành phần đầu sẽ có dạng

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \Phi(t, \tau) \right) \alpha \Phi^T(t, \tau) + \varphi(t, \tau) \alpha \frac{d}{dt} \Phi^T(t, \tau) = \\ & = (F - KH) \Phi(t, \tau) \alpha \Phi^T(t, \tau) + \Phi(t, \tau) \alpha \Phi^T(t, \alpha) (F - KH)^T = \\ & = (F - KH)(P - I_1) + (P - I_1)(F - KH)^T. \end{aligned}$$

Tương tự, thành phần thứ hai có dạng

$$(F - KH)I_1 + I_1(F - KH)^T.$$

Lấy tổng, sẽ có kết quả

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= [F(t) - K(t)H(t)]P(t) + P(t)[F(t) - K(t)H(t)]^T + \\ &+ G(t)Q(t)G^T(t) + K(t)R(t)K^T(t). \end{aligned} \quad (2.32)$$

và giá trị tối ưu của ma trận hệ số khuếch đại là

$$K(t) = P(t)H^T(t)R^{-1}(t) \quad (2.33)$$

Thay thế giá trị này vào (2.32), nhận được PTVP

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= FP + PF^T - PH^T R^{-1} HP - PH^T R^{-1} HP + \\ &+ PH^T R^{-1} RR^{-1} HP + GQG^T, \end{aligned} \quad (2.34)$$

ở đây đã tính đến tính đối xứng của ma trận phương sai, nên $P^T = P$.

Cuối cùng dẫn đến kết quả cần tìm PTVP của phương sai

$$\frac{dP}{dt} = FP + PF^T - PH^T R^{-1} HP + GQG^T. \quad (2.35)$$

PTVP (2.35) được gọi là PT Riccati dưới dạng ma trận.

Trong chế độ thiết lập dừng $dP / dt = 0$, thì

$$FP + PH^T - PH^T R^{-1} HP + GQG^T = 0 \quad (2.36)$$

2.2. Tính toán lọc Kalman nhiều chiều

2.2.1. Trường hợp ứng dụng 1. Yêu cầu xác định đồng thời tọa độ $\lambda_1(t)$ và vận tốc $\lambda_2(t) = d\lambda_1(t)/dt$ của mục tiêu chuyển động. Như vậy, phương trình bộ lọc tạo hình (LTH) tín hiệu hữu ích của hệ có dạng

$$\lambda_2(t) = \frac{d\lambda_1(t)}{dt}$$
$$\omega(t) = \frac{d\lambda_2(t)}{dt}$$

($\omega(t) = d\lambda_2(t)/dt$ là dạng PTVP mô tả QTNN Winer với kỳ vọng xác suất và phương sai là các hàm tuyến tính theo thời gian)

Trong đó: $\omega(t)$ - tập trắng với hàm tương quan $R(t, \tau) = Q\delta(t - \tau)$; $Q = C$ - ma trận hằng số.

Phương trình kênh quan sát (đo lường)

$$x_1(t) = \lambda_1(t) + v_1(t) ; \quad x_2(t) = \lambda_2(t) + v_2(t)$$

Trong đó: $v_1(t), v_2(t)$ - các tập trắng độc lập là nhiễu gây sai số kênh đo lường, với mật độ phổ có cường độ $S_0(t) = S_0 = C_0$ - ma trận hằng số. Dạng véc tơ ma trận của hệ có thể viết như sau:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I};$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} s_r & 0 \\ 0 & s_v \end{bmatrix}$$

Ma trận hệ số khuếch đại

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0^{-1} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{s_r s_v} \begin{bmatrix} s_v & 0 \\ 0 & s_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}/s_r & d_{12}/s_v \\ d_{21}/s_r & d_{22}/s_v \end{bmatrix},$$

Trong đó: $d_{ik} (i, k = 1, 2)$ - các phần tử của ma trận phương sai với $d_{12} = d_{21}$ (do ma trận $\mathbf{D}(t)$ đối xứng).

Như vậy

$$k_{11} = \frac{d_{11}}{s_r}; \quad k_{12} = \frac{d_{12}}{s_v}; \quad k_{21} = \frac{d_{12}}{s_r}; \quad k_{22} = \frac{d_{22}}{s_v}. \quad (2.37)$$

Kết quả PTVP của lọc Kalman ở dạng ma trận

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \hat{\lambda}_1 \\ x_2 - \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix}$$

Hoặc ở dạng vô hướng

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} &= \hat{\lambda}_2 + k_{11}(x_1 - \hat{\lambda}_1) + k_{12}(x_2 - \hat{\lambda}_2) \\ \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} &= k_{21}(x_1 - \hat{\lambda}_1) + k_{22}(x_2 - \hat{\lambda}_2). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Cần giải phương trình ma trận (với điều kiện $d\mathbf{D}/dt = 0$) để tìm ma trận phương sai ở chế độ dừng

$$\mathbf{FD} + \mathbf{DF}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{DS}_0^{-1}\mathbf{D} = 0$$

ở đây

$$\mathbf{FD} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} & d_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{DF}^T = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} & 0 \\ d_{22} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{FD} + \mathbf{DF}^T = \begin{bmatrix} 2d_{12} & d_{22} \\ d_{22} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{FD} + \mathbf{DF}^T + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2d_{12} & d_{22} \\ d_{22} & q \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{DS}_0^{-1}\mathbf{D} &= \frac{1}{s_r s_v} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_v & 0 \\ 0 & s_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s_r s_v} \begin{bmatrix} d_{11}s_v & d_{12}s_r \\ d_{12}s_v & d_{22}s_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s_r s_v} \begin{bmatrix} d_{11}^2 s_v + d_{12}^2 s_r & d_{11} d_{12} s_v + d_{12} d_{22} s_r \\ d_{11} d_{12} s_v + d_{12} d_{22} s_r & d_{12}^2 s_v + d_{22}^2 s_r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kết quả, nhận được các phương trình tìm các hệ số $d_{ik}, i, k = 1, 2$, ở dạng vô hướng

$$\begin{aligned}
\frac{d_{11}^2}{s_r} + \frac{d_{12}^2}{s_v} - 2d_{12} &= 0 \\
d_{12} \left(\frac{d_{11}}{s_r} + \frac{d_{22}}{s_v} \right) - d_{22} &= 0 \\
\frac{d_{12}^2}{s_r} + \frac{d_{22}^2}{s_v} - q &= 0
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Không khó để thấy nghiệm các phương trình là

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \frac{1}{A} \sqrt{s_r \sqrt{q s_r} B}; \quad d_{12} = \frac{1}{A} \sqrt{q s_r}; \quad d_{22} = \frac{1}{A} \sqrt{q \sqrt{q s_r} B} \\
A &= 1 + \sqrt{q s_r} / s_v; \quad B = 2 + \sqrt{q s_r} / s_v = 1 + A
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Xét trường hợp riêng khi chỉ đo được vị trí (cự ly) mục tiêu (không đo được tốc độ khi tạp kênh đo tốc độ rất lớn $s_v \rightarrow \infty$), thì hệ các PT xác định các hệ số được đơn giản đi nhiều:

$$\frac{d_{11}^2}{s_r} - 2d_{12} = 0; \quad \frac{d_{12} d_{11}}{s_r} - d_{22} = 0; \quad \frac{d_{12}^2}{s_r} = q.$$

Theo các biểu thức này, nhận được $d_{12}^* = \sqrt{q s_r}$, từ đây $d_{11}^* = \sqrt{2 d_{12} s_r} = \sqrt{2 s_r \sqrt{q s_r}}$, và

$d_{22}^* = d_{12} d_{11} / s_r = \sqrt{2 q \sqrt{q s_r}}$. Các kết quả này nhận được khi giải với $A = 1, B = 2$. Lúc này $s_v \rightarrow \infty$, các PT lọc Kalman ($k_{12} = k_{22} = 0$) có dạng

$$\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} = \hat{\lambda}_2 + k_{11} (x_1 - \hat{\lambda}_1); \quad \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} = k_{21} (x_1 - \hat{\lambda}_1). \tag{2.41}$$

Nếu đặt thông số $\gamma = s_v / \sqrt{q s_r}$ và chuẩn hóa các hệ số d_{ik} ở dạng $\delta_{ik} = d_{ik} / d_{ik}^*$, nhận được

$$\delta_{11} = \frac{\sqrt{\gamma(\gamma + 0,5)}}{1 + \gamma}; \quad \delta_{12} = \frac{\gamma}{1 + \gamma}; \quad \delta_{22} = \frac{\sqrt{\gamma(\gamma + 0,5)}}{1 + \gamma} = \delta_{11} \tag{2.42}$$

Nếu trước đó các hệ số d_{ik} còn phụ thuộc vào ba thông số q, s_r, s_v , thì sau khi chuẩn hóa các hệ số này chỉ còn phụ thuộc vào γ .

Tìm hàm ma trận truyền đạt

$$\frac{d\hat{\lambda}_i}{dt} \Rightarrow s\hat{\lambda}_i(s) \Rightarrow s\hat{\lambda}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} \\ \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} = s \mathbf{I} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} = s \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{bmatrix}$$

Phương trình bộ lọc

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = (\mathbf{F} - \mathbf{KH})\hat{\lambda} + \mathbf{Kx}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{I}.$$

Hay ở dạng ảnh toán tử Laplace

$$s\mathbf{I}\hat{\lambda} = (\mathbf{F} - \mathbf{K})\hat{\lambda} + \mathbf{Kx}, \text{ hoặc } (\mathbf{K} - \mathbf{F} + s\mathbf{I})\hat{\lambda} = \mathbf{Kx}.$$

Hàm ma trận truyền đạt

$$\hat{\lambda} = \Phi(s)\mathbf{x}; \quad \Phi(s) = (\mathbf{K} - \mathbf{F} + s\mathbf{I})^{-1} \mathbf{K};$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} - \mathbf{F} + s\mathbf{I} = \begin{pmatrix} k_{11} + s & k_{12} - 1 \\ k_{21} & k_{22} + s \end{pmatrix},$$

Bởi vì

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{K} - \mathbf{F} + s\mathbf{I}]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_{22} + s & -k_{21} \\ 1 - k_{12} & k_{11} + s \end{bmatrix}^T;$$

$$\Delta = (k_{11} + s)(k_{22} + s) + (1 - k_{12})k_{21};$$

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= [\mathbf{K} - \mathbf{F} + s\mathbf{I}]^{-1} \mathbf{K} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_{22} + s & 1 - k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (k_{22} + s)k_{11} + k_{21}(1 - k_{12}) & (k_{22} + s)k_{12} + (1 - k_{12})k_{22} \\ -k_{11}k_{21} + k_{21}(k_{11} + s) & -k_{12}k_{21} + (k_{11} + s)k_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Trước tiên xét định thức

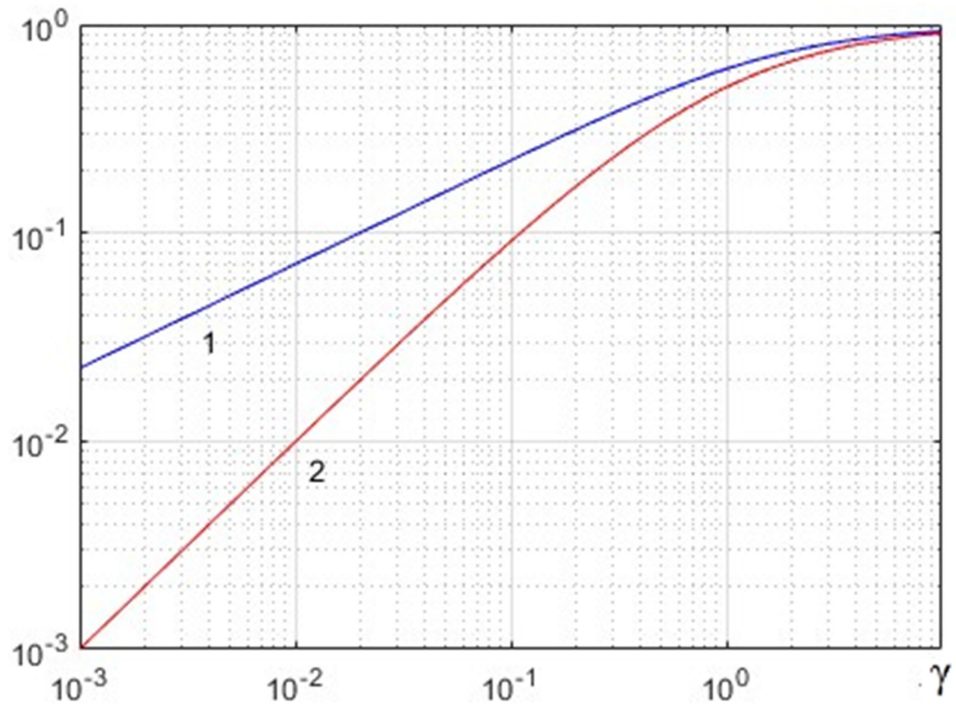
$$\Delta = s^2 + (k_{11} + k_{22})s + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} + k_{21}.$$

Chuẩn hóa các hệ số k_{ik} , $k=1,2$, ở (2.37) cũng như ở (2.42), nhận được kết quả

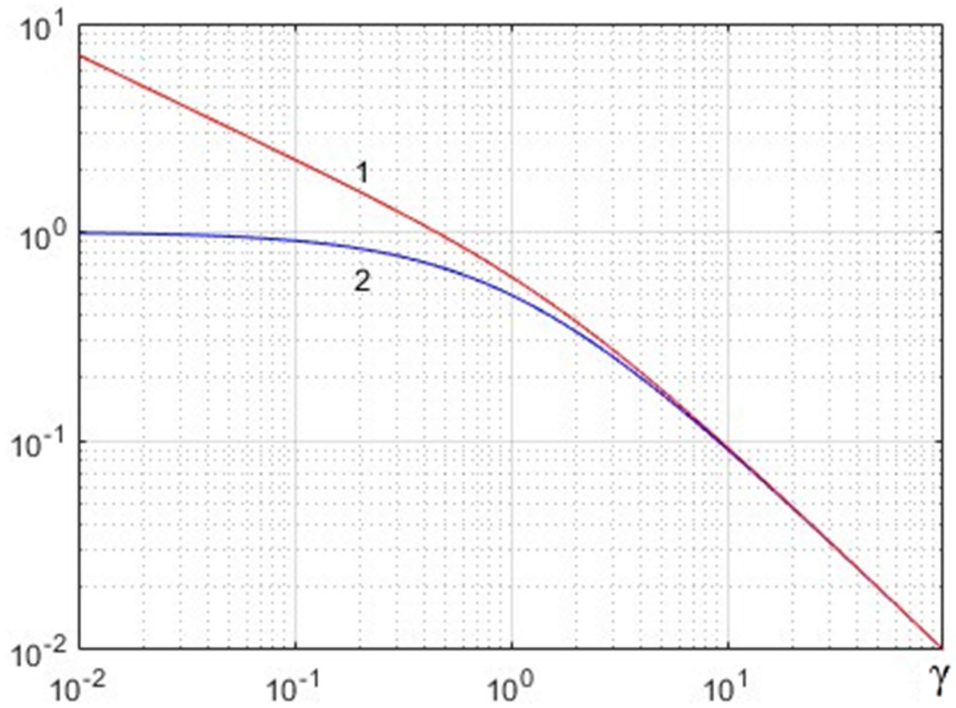
$$k_{11}^* = \frac{k_{11}}{\sqrt{2\sqrt{q/s_r}}} = \frac{1}{1+\gamma} \sqrt{\gamma(\gamma+0,5)}; \quad k_{12}^* = \frac{1}{1+\gamma} = k_{12}.$$

Tương tự ta có

$$k_{21}^* = \frac{k_{21}}{\sqrt{q/s_r}} = \frac{\gamma}{1+\gamma}; \quad \frac{k_{22}}{\sqrt{2\sqrt{q/s_r}}} = \frac{1}{\gamma(1+\gamma)} \sqrt{\gamma(\gamma+0,5)} = k_{22}^*.$$



Hình 2-1: Giá trị chuẩn hoá $k_{11}^*(\gamma)$ và $k_{21}^*(\gamma)$



Hình 2-2: Giá trị chuẩn hoá $k_{22}^*(\gamma)$ và $k_{12}^*(\gamma)$

Trên Hình 2-1 và Hình 2-2 thể hiện các phụ thuộc các giá trị chuẩn hóa vào thông số γ . Ở Hình 2-1 đường cong 1 – quan hệ $k_{11}^*(\gamma)$, $\delta_{11}(\gamma)$, $\delta_{22}(\gamma)$; đường cong 2 - $k_{21}^*(\gamma)$, $\delta_{12}(\gamma)$; ở Hình 2-2 đường cong 1 - $k_{22}^*(\gamma)$, 2 - $k_{12}^*(\gamma)$.

Thay thế các hệ số vừa tìm được k_{ik} , $i, k=1,2$, vào định thức Δ , nhận được

$$\begin{aligned} k_{11} + k_{22} &= \frac{1}{1+\gamma} \sqrt{\gamma(\gamma+0,5)} \sqrt{2\sqrt{q/s_r}} + \frac{\sqrt{\gamma(\gamma+0,5)}}{\gamma(1+\gamma)} \sqrt{2\sqrt{q/s_r}} = \\ &= \frac{\sqrt{\gamma(\gamma+0,5)} \sqrt{2\sqrt{q/s_r}}}{1+\gamma} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) = \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{q/s_r}} \sqrt{1+1/(2\gamma)} = \\ &= 2\xi\omega_0; \quad \omega_0 = \sqrt{\sqrt{q/s_r}} = \sqrt[4]{q/s_r}; \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Khi đó $k_{21} = \omega_0^2 \gamma / (1+\gamma)$. Tương tự tìm thành phần tự do

$$\begin{aligned} k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} + k_{21} &= \frac{\sqrt{2\sqrt{q/s_r}}}{1+\gamma} \sqrt{\gamma(\gamma+0,5)} \frac{\sqrt{2\sqrt{q/s_r}}}{\gamma(1+\gamma)} \sqrt{\gamma(\gamma+0,5)} - \\ &- \frac{\gamma}{1+\gamma} \sqrt{q/s_r} \left(\frac{1}{1+\gamma} - 1\right) = \frac{2\sqrt{q/s_r} \gamma(\gamma+0,5)}{(1+\gamma)^2} \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2} \sqrt{q/s_r} = \\ &= \frac{\sqrt{q/s_r}}{(1+\gamma)^2} [2(\gamma+0,5) + \gamma^2] = \sqrt{q/s_r} = \omega_0^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Như vậy

$$\Delta = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2.$$

Ma trận hàm truyền đạt

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

Trong đó

$$\varphi_{11} = k_{11}s + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} + k_{21} = k_{11}s + \omega_0^2 = k_{11}(s + a);$$

$$k_{11} = \frac{2\xi\omega_0\gamma}{(1+\gamma)}; \quad a = \frac{\omega_0^2}{k_{11}} = \frac{\omega_0^2(1+\gamma)}{2\xi\gamma}; \quad k_{11} = \frac{\omega_0^2}{a};$$

$$\varphi_{21} = k_{21}s = s \frac{\gamma}{1+\gamma} \sqrt{\frac{q}{s_r}} = \frac{s\omega_0^2\gamma}{(1+\gamma)};$$

$$\varphi_{12} = k_{12}s + k_{22} = k_{12}(s + b); \quad b = \frac{k_{22}}{k_{12}} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2\gamma}} \omega_0 = 2\xi \omega_0$$

$$k_{12} = \frac{1}{1 + \gamma} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2(1 + \gamma)} = \frac{\omega_0^2}{ab\gamma}$$

$$\varphi_{22} = k_{12}s + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = k_{22}(s + c);$$

$$c = \frac{(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})}{k_{22}}$$

Từ (2.44) $k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = \omega_0^2 - k_{21}$, khi đó $c = \omega_0^2 / k_{22} - k_{21} / k_{22}$.

Bởi vì $k_{22} = \frac{2\xi\omega_0}{(1 + \gamma)}$; $k_{21} = \frac{\gamma}{1 + \gamma}\omega_0^2$, nên

$$c = \frac{\omega_0^2(1 + \gamma)}{2\xi\omega_0} - \frac{\gamma\omega_0^2(1 + \gamma)}{(1 + \gamma)2\xi\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\xi}(1 + \gamma - \gamma) = \frac{\omega_0}{2\xi}.$$

Khi đó

$$k_{22} = \frac{2\xi\omega_0^2}{\omega_0(1 + \gamma)} = \omega_0^2 \frac{1}{c(1 + \gamma)}.$$

Do vậy, hoàn thành tìm ma trận hàm truyền đạt

$$\Phi(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2} \begin{bmatrix} \frac{s + a}{a} & \frac{s + b}{ab\gamma} \\ \frac{\gamma s}{1 + \gamma} & \frac{s + c}{c(1 + \gamma)} \end{bmatrix},$$

Trong đó

$$a = \frac{1 + \gamma}{\gamma} \frac{\omega_0}{2\xi}; \quad b = 2\xi\omega_0; \quad c = \frac{\omega_0}{2\xi}; \quad \omega_0 = \left(\frac{q}{s_r} \right)^{1/4}.$$

Nếu chỉ đo vị trí (cự ly) $\gamma \rightarrow \infty$, nhận được

$$\begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{a}(s + a) \\ s \end{bmatrix} x_1; \quad \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad a = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Trường hợp này tương đương với tạp trắng trong kênh đo tốc độ khi $\gamma \rightarrow \infty$, lúc đó $s_r \rightarrow \infty$, tại đây theo (2.42) tìm $\delta_{11} \rightarrow 1, \delta_{22} \rightarrow 1, \delta_{12} \rightarrow 1$, điều này có nghĩa là

$d_{11} \rightarrow d_{11}^*, d_{12} \rightarrow d_{12}^*, d_{22} \rightarrow d_{22}^*$ (Hình 2-1). Theo (2.40) tìm được
 $A \rightarrow 1, B \rightarrow \sqrt{2}$, từ đó

$$\delta_{11} \rightarrow \sqrt{2s_r \sqrt{qs_r}}; \quad \delta_{22} \rightarrow \sqrt{qs_r}; \quad \delta_{22} \rightarrow \sqrt{2q \sqrt{qs_r}}. \quad (2.46)$$

Phương trình lọc có dạng (2.41). Không có quan sát tọa độ sẽ tương đương điều kiện $s_r \rightarrow \infty$, khi này $\gamma \rightarrow 0$, $\delta_{11} \rightarrow 0, \delta_{22} \rightarrow 0, \delta_{12} \rightarrow 0$; $k_{12}^* \rightarrow 1, k_{22}^* \rightarrow \infty$ (Hình 2-2)

Từ (2.44) suy ra

$$d_{11} \rightarrow \infty; \quad d_{11} \rightarrow s_v; \quad d_{22} \rightarrow \sqrt{qs_r}$$

Như vậy, chỉ quan sát tốc độ sẽ dẫn đến sai số lớn vô cùng theo tọa độ là sự khác biệt so với chỉ quan sát vị trí tọa độ, khi đó trung bình của bình phương sai số theo tốc độ là hữu hạn [(2.46)].

Trường hợp mức nhiễu nhỏ ở kênh quan sát tốc độ (sai số nhỏ khi đo tốc độ) có thể coi $s_v \rightarrow 0$, khi đó $\gamma = s_v / \sqrt{qs_r} \ll 1$. Như vậy theo (2.40) suy ra

$$d_{11} \sim \sqrt{s_r s_v} \ll 1; \quad d_{12} \sim s_v \ll 1; \quad d_{22} \sim \sqrt{qs_v} \ll 1$$

Trong trường hợp này, từ phần đầu (2.38) nhận được

$$\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} = \hat{\lambda}_2 + \sqrt{\frac{s_v}{s_r}} (x_1 - \hat{\lambda}_1) + x_2 - \hat{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{s_v}{s_r}} (x_1 - \hat{\lambda}_1) + x_2,$$

Có nghĩa ước lượng $\hat{\lambda}_2$ không có trong thành phần $\hat{\lambda}_1$.

2.2.2. Trường hợp ứng dụng 2. Yêu cầu xác định phương trình ước lượng $\hat{\lambda}$ của véc tơ trạng thái λ , nêu biết phương trình trạng thái của hệ

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \lambda_2; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_2 + w(t); \quad x(t) = \lambda_1(t) + v(t),$$

Trong đó: $w(t), v(t)$ - các tạp trắng độc lập với cường độ phổ $\Psi_w = 1, \Psi_v = 2$.

Thực hiện tính toán. Trong trường hợp này

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix};$$

$$q = \Psi_w = 1; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_0 = \Psi_v; \quad S_0^{-1} = \frac{1}{\Psi_v}.$$

Để tìm các phần tử của ma trận phương sai D cần thiết giải phương trình ma trận $\mathbf{F}D + D\mathbf{F}^T + \mathbf{G}Q\mathbf{G}^T - D\mathbf{H}^T S_0^{-1} \mathbf{H}D = 0$.

ở đây

$$\mathbf{G}Q\mathbf{G}^T = \mathbf{Q}; \quad \mathbf{H}^T S_0^{-1} \mathbf{H} = \frac{1}{\Psi_v} \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình cho các phần tử d_{ik} , $i, k=1,2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \\ - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hoặc

$$\begin{bmatrix} d_{12} + d_{21} & d_{22} - d_{12} \\ d_{22} - d_{21} & -2d_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_{11}^2 & d_{11}d_{12} \\ d_{11}d_{21} & d_{12}d_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kết quả tìm được hệ phương trình cho các phần tử (khi $d_{12} = d_{21}$).

$$2d_{12} - \frac{d_{11}^2}{2} = 0; \quad d_{22} - d_{12} - \frac{d_{11}d_{12}}{2} = 0; \quad 2d_{22} + \frac{d_{12}^2}{2} = 1.$$

Từ đó $d_{11} = 1,1; d_{12} = d_{21} = 0,3025; d_{22} = 0,470$

Véc tơ hệ số khuếch đại

$$\mathbf{K} = D\mathbf{H}^T \Psi_v^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1,1 & 0,3025 \\ 0,3025 & 0,470 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,55 \\ 0,151 \end{bmatrix}$$

Phương trình ước lượng lọc Kalman

$$\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} = \hat{\lambda}_2 + 0,55(x - \hat{\lambda}_1); \quad \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} = -\hat{\lambda}_2 + 0,151(x - \hat{\lambda}_1) \quad (2.47)$$

2.2.3. Trường hợp ứng dụng 3. Hãy tìm PTVP của ước lượng véc tơ λ , nếu hệ PTVP trạng thái và quan sát có dạng

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \lambda_2; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = w(t); \quad x(t) = \lambda_1(t) + v(t),$$

Trong đó: $w(t)$, $v(t)$ - các tạp trắng độc lập với cường độ $\psi_w = 1$ và $\psi_v = 0,5$.

Thực hiện tính toán. Đây là trường hợp riêng của ứng dụng 2.2.1, khi không có PT thứ hai trong kênh quan sát (không đo tốc độ), khi đó $s_v \rightarrow \infty; s_r = \Psi_v = 0,5$. Phương trình lọc Kalman được suy ra từ phương trình tổng quát khi $s_v \rightarrow \infty$ và có dạng hệ PTVP (2.41). Cần tính tiếp giá trị các hệ số $k_{11}; k_{21}$ khi $q = \Psi_w = 1$

$$k_{11} = \frac{d_{11}}{\Psi_v} = 2d_{11}; k_{21} = \frac{d_{12}}{\Psi_v} = 2d_{12}; d_{11} = d_{11}^* = \sqrt{2\Psi_v \sqrt{\Psi_w \Psi_v}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad (2.48)$$

Như vậy $k_{11} = \sqrt[4]{8}; d_{12} = d_{12}^* = \sqrt{\Psi_w \Psi_v} = \sqrt{2} / 2$; hoặc $k_{21} = k_{12} = \sqrt{2}$

Phương trình ước lượng của lọc Kalman

$$\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} = \hat{\lambda}_2 + \sqrt[4]{8}(x - \hat{\lambda}_1); \quad \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} = \sqrt{2}(x - \hat{\lambda}_1) \quad (2.49)$$

2.2.4. Trường hợp ứng dụng 4. Cho biết trước phương trình trạng thái (lọc tạo hình) và phương trình kênh quan sát

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\lambda_1 + w(t); \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -2\lambda_2 + 2w(t) \quad (2.50)$$

$$x_1(t) = \lambda_1(t) + v_1(t); \quad x_2(t) = \lambda_2(t) + v_2(t) \quad (2.51)$$

Trong đó: $w(t)$ - tạp trắng; $E(w_t) = 0; R_w = \delta(\tau); v_1(t)$ và $v_2(t)$ - các tạp trắng không tương quan với nhau và với $w(t)$; $E[v_1(t)] = E[v_2(t)] = 0$; $R_{v_i}(\tau) = r_i \delta(\tau)$; $r_1 = 0,01; r_2 = 0,04$.

Hiển nhiên ở đây

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,04 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = 1$$

Cần tìm bộ lọc Kalman gồm phương trình ước lượng và phương trình Ricatti. Cần tìm (trong chế độ thiết lập dừng) hàm trọng lượng dạng ma trận của bộ lọc tối ưu.

Thực hiện tính toán. Viết (2.50) và (2.51) dưới dạng ma trận

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{F}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{G}w(t); \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^T$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{v}(t); \quad \mathbf{v}(t) = (v_1, v_2)^T; \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

Lúc này, thuật toán ước lượng của bộ lọc Kalman ở dạng ma trận là

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = \mathbf{F}\hat{\lambda} + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{H}\hat{\lambda}) = \mathbf{F}\hat{\lambda} + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \hat{\lambda}) \quad (2.52)$$

Trong đó: $\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{R}^{-1}$; $\mathbf{K} = \{k_{ij}\}, i, j = 1, 2$ - ma trận hệ số khuếch đại; $\mathbf{P}$ - ma trận phương sai, $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}, i, j = 1, 2$.

Để khép kín lời giải, cần biểu diễn các hệ số khuếch đại $\{k_{ij}\}, i, j = 1, 2$ qua các phần tử ma trận phương sai $\{p_{ij}\}, i, j = 1, 2$. Nghiệm $\mathbf{P}$ nhận được khi giải phương trình Ricatti trong chế độ xác lập dừng.

Để có được kết quả, trước tiên cần tìm ma trận ngược $\mathbf{R}^{-1}$

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{\mathbf{R}}^T = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0,04 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix} = \frac{10^{-2}}{4 \cdot 10^{-4}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 25 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trong đó: $\tilde{\mathbf{R}}^T$ - ma trận chuyển vị liên hợp, kết quả

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 25 = 25 \begin{bmatrix} 4p_{11} & p_{12} \\ 4p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Suy ra

$$k_{11} = 100p_{11}; \quad k_{12} = 25p_{12}; \quad k_{21} = 100p_{12}; \quad k_{22} = 25p_{22} \quad (2.53)$$

Giải phương trình Ricatti, tìm các phần tử $\{k_{ij}\}$ của ma trận phương sai $\mathbf{P}$

$$\mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P} = 0$$

Khi tính đến các giá trị các ma trận $\mathbf{H}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{K}$

$$\mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{G}^T - \mathbf{K}\mathbf{P} = 0 \quad (2.54)$$

Trong đó: $\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{R}^{-1}$

Tìm các thành phần trong (2.54):

$$\mathbf{F}\mathbf{P} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 2p_{12} & 2p_{22} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^T = - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_{11} & 2p_{12} \\ p_{12} & 2p_{22} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{FP} + \mathbf{PF}^T + \mathbf{GG}^T &= \\
&= -\begin{bmatrix} 2p_{11} & 3p_{12} \\ 3p_{12} & 4p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2p_{11} + 1 & -3p_{12} + 2 \\ -3p_{12} + 2 & -4p_{22} + 4 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{PH}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{HP} = \mathbf{KP} &= 25 \begin{bmatrix} 4p_{11} & p_{12} \\ 4p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \\
&= 25 \begin{bmatrix} 4p_{11}^2 + p_{12}^2 & 4p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ 4p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} & 4p_{12}^2 + p_{22}^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Từ kết quả theo (2.54), tìm các phương trình xác định các phần tử $\{k_{ij}\}$

$$\begin{aligned}
-2p_{11} + 1 - 100p_{11}^2 - 25p_{12}^2 &= 0; \\
-3p_{12} + 2 - 100p_{11}p_{12} - 25p_{12}p_{22} &= 0; \quad (16.19) \\
-4p_{22} + 4 - 100p_{12}^2 - 25p_{22}^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Có thể viết hệ các phương trình đại số trên dưới dạng sau

$$\begin{aligned}
2a + 100a^2 + 25b^2 &= 1; \\
3b + 100ab + 25bc &= 2; \\
4c + 100b^2 + 25c^2 &= 4
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Trong đó: $a = p_{11}$; $b = p_{12}$; $c = p_{22}$.

Sau khi giải các phương trình (2.55) trên máy tính, nhận được

$$a = p_{11} = 6,8092 \cdot 10^{-2}; \quad b = p_{12} = 12,652 \cdot 10^{-2}; \quad c = p_{22} = 23,996 \cdot 10^{-2}$$

Khi đó, theo (2.53)

$$k_{11} = 6,8092; \quad k_{12} = 3,163; \quad k_{21} = 12,652; \quad k_{22} = 5,9989 \approx 6.$$

Như vậy theo (2.52), cần tìm các phương trình ước lượng lọc Kalman ở dạng vô hướng

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} &= -\hat{\lambda}_1 + 6,8092(x_1 - \hat{\lambda}_1) + 3,1629(x_2 - \hat{\lambda}_2) \\
\frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} &= -2\hat{\lambda}_2 + 12,6516(x_1 - \hat{\lambda}_1) + 6(x_2 - \hat{\lambda}_2).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Tìm ma trận hàm trọng lượng lọc tối ưu ở chế độ dừng. khi đó từ (2.52) có

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{K} - \mathbf{F})\hat{\Lambda} = \mathbf{KX}, \tag{2.57}$$

Trong đó: $\mathbf{I}$ - ma trận đơn vị; $\hat{\Lambda}$, $\mathbf{X}$ - ảnh của ước lượng và tín hiệu lỗi vào.

Từ (2.57) tìm được

$$\hat{\Lambda} = \Phi(s)X, \quad (2.58)$$

Trong đó: $\Phi(s) = (s\mathbf{I} + \mathbf{K} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{K}$, lưu ý

$$\mathbf{K} - \mathbf{F} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} + 1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} + 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} - \mathbf{F} + \mathbf{I}s = \begin{bmatrix} k_{11} + 1 + s & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} + 2 + s \end{bmatrix};$$

$$(\mathbf{K} - \mathbf{F} + s\mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_{22} + 2 + s & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} + 1 + s \end{bmatrix}.$$

Định thức của ma trận

$$\Delta = (k_{11} + 1 + s)(k_{22} + 2 + s) - k_{12}k_{21} = s^2 + As + B,$$

$$A = k_{11} + k_{22} + 3 = 5,808; \quad B = (k_{11} + 1)(k_{22} + 2) - k_{12}k_{21} = 22,449.$$

Như vậy, hàm ma trận $\Phi(s)$ có dạng

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_{22} + 2 + s & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} + 1 + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_{11}(k_{22} + 2 + s) - k_{12}k_{21} & k_{12}(k_{22} + 2 + s) - k_{12}k_{22} \\ k_{21}(k_{11} + 1 + s) - k_{11}k_{21} & k_{22}(k_{11} + 1 + s) - k_{12}k_{21} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{k_{11}(s + c_1)}{(s - s_1)(s - s_2)} & \frac{k_{12}(s + 2)}{(s - s_1)(s - s_2)} \\ \frac{k_{21}(s + 1)}{(s - s_1)(s - s_2)} & \frac{k_{22}(s + c_2)}{(s - s_1)(s - s_2)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

Trong đó: - các nghiệm của phương trình

$$\Delta = 0; \quad s_1 = -14,2306 = -a; \quad s_2 = -1,577 = -b;$$

$$c_1 = (k_{11}k_{22} + 2k_{11} - k_{12}k_{21}) / k_{11} = k_{22} + 2 - k_{12}k_{21} / k_{11} = 2,12226;$$

$$c_2 = 1 + k_{11} - k_{12}k_{21} / k_{22} = 1 + k_{11}(1 - 4k_2^2) = 1 - 0,002137 = 0,997863 \approx 1 \quad (2.60)$$

Như trường hợp riêng của (2.59)

2.2.5. Trường hợp ứng dụng 5. Xác định cự ly đến mục tiêu đang chuyển động với gia tốc hằng số, chuyển động này bị tác động từ các nhiễu động $\omega_1(t), \omega_2(t)$ với hàm ma trận tương quan

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Giá trị ban đầu

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Tạp trắng trong kênh quan sát có giá trị trung bình $E(n_t) = 0$ và hàm tương quan $R_n(\tau) = R\delta(\tau)$, trong đó $R = 100M^2$.

Các giá trị ban đầu của ước lượng cự ly, của tốc độ và gia tốc từ mục tiêu bằng

$$\hat{r}_0 = 23150m; \quad \hat{v}_0 = -150m/c; \quad \hat{\alpha}_0 = 0$$

Giá trị thực của các thông số chuyển động $r_0 = 2300m; \quad v_0 = -200m/c; \quad \alpha_0 = 0.8m/c^2$

Hãy tìm các ước lượng thông số chuyển động

Thực hiện tính toán. Phương trình chuyển động của mục tiêu

$$\dot{x}_1 = x_2 + w_1(t); \quad \dot{x}_2 = x_3 + w_2(t); \quad \dot{x}_3 = 0$$

Trong đó $x_1 = x_1(t)$ - cự ly đến mục tiêu, $x_2 = x_2(t); x_3 = x_3(t)$ tốc độ và gia tốc.

Phương trình quan sát

$$y(t) = x(t) + n(t)$$

Dạng ma trận của phương trình chuyển động và quan sát

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{w}(t). \quad (2.61)$$

$$y(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t)$$

Trong đó:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình xác định ước lượng tối ưu của bộ lọc

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(y(t) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.62)$$

Trong đó: $\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T / R$.

Phương trình Ricatti xác định ma trận phương sai

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{P} / R \quad (2.63)$$

Do $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}, i, j = \overline{1, 3}$, nên ma trận hệ số khuếch đại

$$\mathbf{K} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} \frac{1}{R} = \begin{bmatrix} p_{11}/R \\ p_{12}/R \\ p_{13}/R \end{bmatrix}$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{R} \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P} =$$

$$= \frac{1}{R} \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ p_{12} & 0 & 0 \\ p_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{11}p_{12} & p_{11}p_{13} \\ p_{11}p_{12} & p_{12}^2 & p_{12}p_{13} \\ p_{13}p_{11} & p_{13}p_{12} & p_{13}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{12} & p_{13} & 0 \\ p_{22} & p_{23} & 0 \\ p_{23} & p_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra, các phương trình phương sai (2.63) có dạng

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \begin{bmatrix} 2p_{12} - p_{11}^2 / R & p_{13} + p_{22} - p_{11}p_{12} / R & p_{23} - p_{11}p_{13} / R \\ p_{22} + p_{13} - p_{11}p_{12} / R & 2p_{23} + 0,1 - p_{12}^2 / R & p_{33} - p_{12}p_{13} / R \\ p_{23} - p_{11}p_{13} / R & p_{33} - p_{12}p_{13} / R & -p_{13}^2 / R \end{bmatrix}$$

(2.64)

Vế phải là ma trận đối xứng.

Ở chế độ dừng, khi $d\mathbf{P} / dt = 0$, nhận được

$$p_{13} = p_{23} = p_{33} = 0; \quad 2p_{12} = p_{11}^2 / R; \quad p_{22} = p_{11}p_{12} / R; \quad p_{12}^2 / R = 0,1$$

Như vậy

$$p_{12} = \sqrt{0,1R}; \quad p_{11} = \sqrt{2Rp_{12}} = \sqrt{2R\sqrt{0,1R}};$$

$$p_{22} = \sqrt{2R\sqrt{0,1R}}\sqrt{0,1R} / R = \sqrt{0,2\sqrt{0,1R}}.$$

Theo đầu bài, $R = 100$, do vậy ở chế độ dừng

$$p_{12} = \sqrt{10} = 3,16; \quad p_{11} = 10\sqrt{2\sqrt{10}} = 25,15; \quad p_{22} = \sqrt{2\sqrt{0,1}} = 0,795$$

Từ (2.64) hệ PTVP cho các phần tử phương sai

$$\frac{dp_{11}}{dt} = 2p_{12} - \frac{p_{11}^2}{R}; \quad \frac{dp_{12}}{dt} = p_{13} + p_{22} - p_{11} \frac{p_{12}}{R}$$

$$\frac{dp_{13}}{dt} = p_{23} - p_{11} \frac{p_{13}}{R}; \quad \frac{dp_{22}}{dt} = 2p_{23} + 0,1 - \frac{p_{12}^2}{R}$$

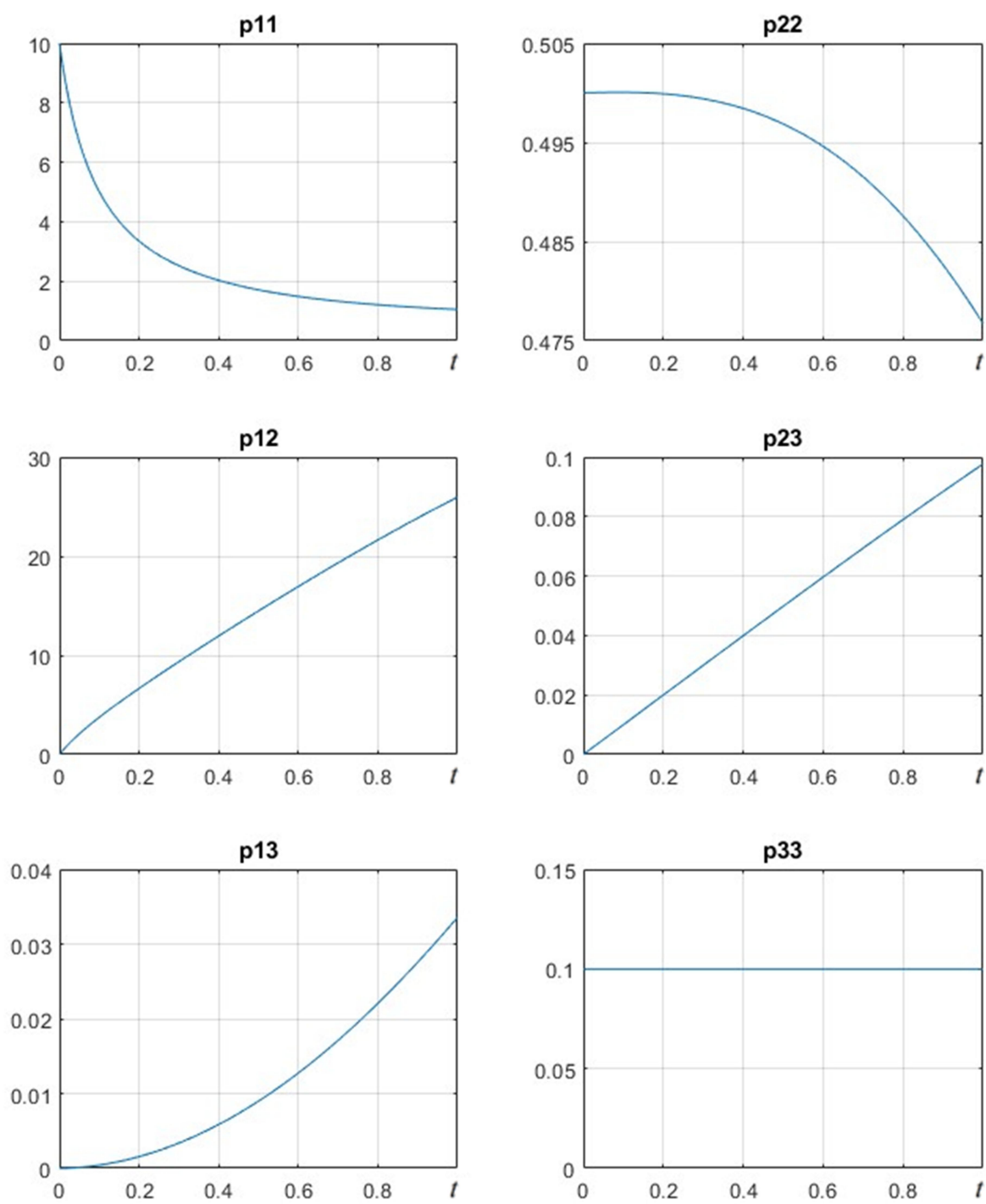
$$\frac{dp_{23}}{dt} = p_{33} - p_{12} \frac{p_{13}}{R}; \quad \frac{dp_{33}}{dt} = -\frac{p_{13}^2}{R}$$

Với điều kiện ban đầu $p_{11}^0 = 10^3$; $p_{22}^0 = 50$; $p_{33}^0 = 0,1$, khi $R = 100$.

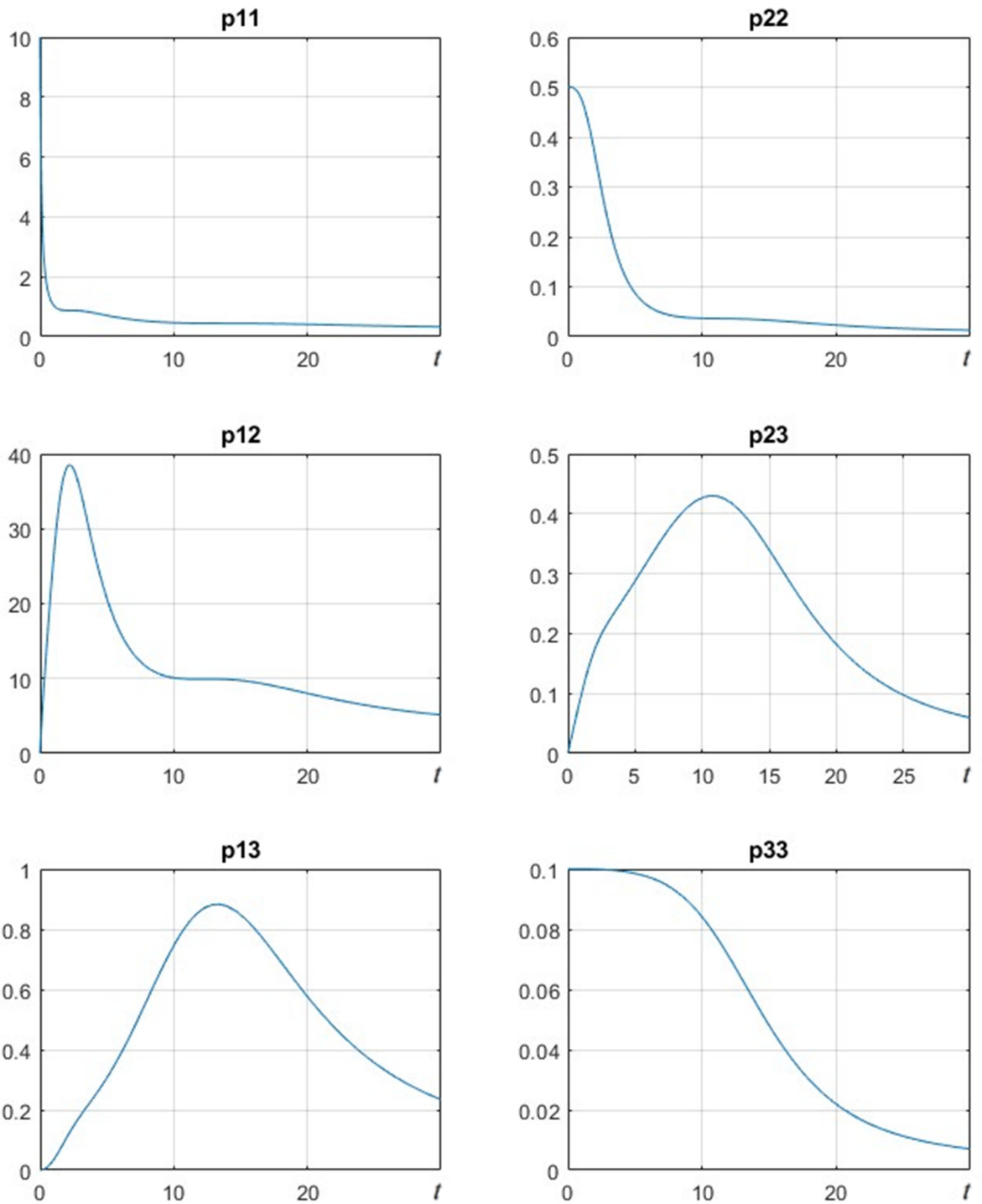
Trên hình Hình 2-3 và Hình 2-4 biểu diễn sự phụ thuộc thời gian của các phần tử $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{33}$, lưu ý các phần tử p_{11}, p_{22} với thừa số 0,01. Tại thời điểm $t = 1000$, nhận được:

$$p_{11} = 25,249, \quad p_{22} = 0,8,$$

$$p_{33} = 10^{-4}, \quad p_{12} = 3,188, \quad p_{13} = 0,0032, \quad p_{23} = 0,0008.$$



Hình 2-3: Sự phụ thuộc thời gian của các phân tử $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{33}$ với $t \in (0,1)$



Hình 2-4: Sự phụ thuộc thời gian của các phần tử $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{33}$ với $t=(0;30)$

Tìm ma trận hàm trọng lượng của hệ tối ưu. Từ PTVP các ước lượng, nhận được

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{KH})\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{KY}.$$

Khi đó ma trận hàm trọng lượng

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{KH})^{-1} \mathbf{K} \quad (2.65)$$

$$\mathbf{KH} - \mathbf{F} = \begin{bmatrix} p_{11}/R & 0 & 0 \\ p_{12}/R & 0 & 0 \\ p_{13}/R & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}/R & -1 & 0 \\ p_{12}/R & 0 & -1 \\ p_{13}/R & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s\mathbf{I} + \mathbf{KH} - \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11}/R & -1 & 0 \\ p_{12}/R & 0 & -1 \\ p_{13}/R & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s + p_{11}/R & -1 & 0 \\ p_{12}/R & s & -1 \\ p_{13}/R & 0 & s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tại $p_{13} = 0$, nhận được

$$s\mathbf{I} + \mathbf{KH} - \mathbf{F} = \begin{bmatrix} s + p_{11}/R & -1 & 0 \\ p_{12}/R & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Định thức ma trận

$$\begin{aligned} \Delta &= s \begin{bmatrix} s + p_{11}/R & -1 \\ p_{12}/R & s \end{bmatrix} = s \left[\left(s^2 + \frac{p_{11}}{R}s \right) + \frac{p_{12}}{R} \right] = \\ &= s \left(s^2 + \frac{p_{11}}{R}s + \frac{p_{12}}{R} \right) = s(s^2 + 2\xi s + \omega_0^2) \end{aligned}$$

$$2\xi = p_{11}/R; \quad \omega_0^2 = p_{12}/R.$$

Tiếp tục tìm ma trận liên hợp $\tilde{\mathbf{A}} = \{A_{ik}\}_{ik}, i, k = 1, 2, 3$, trong đó A_{ik} - phần phụ đại số của các phần tử tương ứng trong ma trận:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Khi đó $\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}} / \Delta$;

$$A_{11} = s^2; \quad A_{12} = -\frac{p_{12}}{R}s; \quad A_{21} = s; \quad A_{22} = s \left(s + \frac{p_{11}}{R} \right); \quad A_{13} = 0$$

$$A_{23} = 0; \quad A_{31} = 1; \quad A_{32} = s + \frac{p_{11}}{R}; \quad A_{33} = \left(s + \frac{p_{11}}{R} \right)s + \frac{p_{12}}{R}$$

Như vậy, ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1} = (s\mathbf{I} + \mathbf{KH} - \mathbf{F})^{-1}$ có dạng

$$(\mathbf{sI} + \mathbf{KH} - \mathbf{F})^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s^2 & -\frac{p_2}{R}s & 0 \\ s & s\left(s + \frac{p_{11}}{R}\right) & 0 \\ 1 & s + \frac{p_{11}}{R} & \left(s + \frac{p_{11}}{R}\right)s + \frac{p_{12}}{R} \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$\Phi(s) = (\mathbf{sI} - \mathbf{F} + \mathbf{KH})^{-1} \mathbf{K} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Delta R} \begin{bmatrix} s^2 & -\frac{p_2}{R}s & 0 \\ s & s\left(s + \frac{p_{11}}{R}\right) & 0 \\ 1 & s + \frac{p_{11}}{R} & \left(s + \frac{p_{11}}{R}\right)s + \frac{p_{12}}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{R\Delta} \begin{bmatrix} p_{11}s^2 - p_{12}s \\ p_{11}s + p_{12}s\left(s + \frac{p_{11}}{R}\right) \\ p_{11} + \left(s + \frac{p_{11}}{R}\right)p_{12} + p_{13}s\left(s + \frac{p_{11}}{R}\right) + p_{12}\frac{p_{13}}{R} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{R\Delta} \begin{bmatrix} s(sp_{11} - p_{12}^2) \\ s(sp_{12} + a) \\ s^2p_{13} + bs + c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} a &= p_{11} + p_{11}p_{12}/R; \quad b = p_{12} + p_{11}p_{13}/R; \\ c &= p_{11} + p_{11}p_{12}/R + p_{12}p_{13}/R + p_{11}p_{13}/R; \quad p_{13} = 0 \end{aligned}$$

Kết quả tìm được

$$\Phi(s) = \frac{1}{R(s^2 + 2\xi s + \omega_0^2)} \begin{bmatrix} sp_{11} - p_{12}^2 \\ sp_{12} + a \\ bs - c \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Khi biết ma trận hàm trọng lượng $\Phi(s)$, thì sẽ xác định được các giá trị thiết lập của tất cả các tọa độ.

2.2.6. Trường hợp ứng dụng 6. Xét bài toán lọc đường bao và pha của quá trình ngẫu nhiên dài thông tần hẹp $s(t) = A(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)]$, được quan sát trên nền tạp trắng phân bố Gauss $n(t)$

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)] + n(t) \quad (2.67)$$

Trong đó:

$$E(n_t) = 0; R_n(\tau) = (N_0 / 2) \delta(\tau)$$

Có thể biểu diễn QTNN dài thông hẹp $s(t)$ dưới dạng

$$s(t) = \lambda_1(t) \cos \omega_0 t + \lambda_2(t) \sin \omega_0 t, \quad (2.68)$$

Trong đó: $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ - các thành phần trực giao. giả định $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ - là các quá trình Gauss Markov độc lập được mô tả bởi các phương trình

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\alpha \lambda_1 + n_{01}; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -\alpha \lambda_2 + n_{02}, \quad (2.69)$$

Trong các PTVP này n_{01} và n_{02} - các tạp trắng Gauss độc lập có mật độ phổ hai phía $N_0 / 2$. Lưu ý, từ (2.68) suy ra

$$A(t) = \sqrt{\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)}; \quad \varphi(t) = \arctg \frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)}. \quad (2.70)$$

Đường bao có phân bố xác suất dạng hàm Reley, còn pha phân bố đều trên khoảng $(0, 2\pi)$. Trên cơ sở (2.69) và (2.70) có thể nhận được các PTVP cho $A(t)$, $\varphi(t)$. Ví dụ, cho $A(t)$ có dạng

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha A + \frac{N_0}{4A} + n_0(t), \quad (2.71)$$

Trong đó: $n_0(t)$ - tạp trắng Gauss với mật độ phổ hai phía $N_0 / 2$.

Tổng quát, bài toán lọc $A(t)$ và $\varphi(t)$ là bài toán lọc phi tuyến, bởi vì $\varphi(t)$ có trong phương trình quan sát theo dạng phi tuyến, còn đối với $A(t)$ có phương trình trạng thái là dạng phi tuyến (2.71). Giải bài toán lọc phi tuyến phức tạp hơn nhiều so với lọc tuyến tính. Do đó sẽ thuận tiện khi coi mật độ xác suất hậu nghiệm của quá trình $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ là xấp xỉ bằng hàm Gauss, để có thể giải trong khuôn

khô lọc tuyến tính đối với λ . Từ đó xác định mật độ xác suất hậu nghiệm của $A(t)$ và $\varphi(t)$, lần lượt tới các đánh giá tối ưu cho đường bao và pha.

Việc giải bài toán lọc cho λ_1 và λ_2 thực hiện theo phương trình (2.13) và (2.35) với các tham số cụ thể như sau

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} = -\alpha \mathbf{I};$$

$$\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T = \mathbf{N}_0 = \begin{bmatrix} N_0/2 & 0 \\ 0 & N_0/2 \end{bmatrix} = \frac{N_0}{2} \mathbf{I} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{H}(t) = [\cos \omega_0 t \sin \omega_0 t]; \quad R = N_0/2$$

Phương trình xác định các ước lượng của bộ lọc

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \hat{\lambda} + \frac{2}{N} \mathbf{P} \begin{bmatrix} (x - \hat{s}) \cos \omega_0 t \\ (x - \hat{s}) \sin \omega_0 t \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Bỏ qua các thành phần hàm điều hòa bậc hai, ta có

$$\hat{s}(t) \cos \omega_0 t = \hat{\lambda}_1 \cos^2 \omega_0 t + \hat{\lambda}_2 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \approx \frac{1}{2} \hat{\lambda}_1;$$

$$\hat{s}(t) \sin \omega_0 t = \hat{\lambda}_1 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t + \hat{\lambda}_2 \sin^2 \omega_0 t \approx \frac{1}{2} \hat{\lambda}_2$$

Theo (2.73), tìm được PTVP

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \hat{\lambda} + \frac{1}{N} \mathbf{P} \begin{bmatrix} 2x(t) \cos \omega_0 t - \hat{\lambda}_1 \\ 2x(t) \sin \omega_0 t - \hat{\lambda}_2 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Còn lại cần tìm các phần tử trong ma trận phương sai. Vì bỏ qua các hàm điều hòa bậc hai $\cos 2\omega_0 t$, $\sin 2\omega_0 t$ và theo (2.35) nhận được PTVP

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -2\alpha \mathbf{P} - \frac{1}{N} \mathbf{P}^2 + \frac{N_0}{2} \mathbf{I}, \quad (2.75)$$

Hoặc

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -2\alpha \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{N} \begin{bmatrix} p_{11}^2 + p_{12}^2 & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} & p_{12}^2 + p_{22}^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{N_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Các PTVP ở dạng vô hướng

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{11}}{dt} &= -2\alpha p_{11} - \frac{1}{N}(p_{11}^2 + p_{12}^2) + \frac{N_0}{2} \\
\frac{dp_{12}}{dt} &= -2\alpha p_{12} - \frac{1}{N}(p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}); \\
\frac{dp_{22}}{dt} &= -2\alpha p_{22} - \frac{1}{N}(p_{12}^2 + p_{22}^2) + \frac{N_0}{2}.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Ở chế độ dừng, từ PTVP thứ hai suy ra $p_{12} = 0$, như vậy các phần tử p_{11}, p_{22} sẽ được tìm như nghiệm phương trình đại số bậc hai

$$x^2 + 2\alpha Nx - N_0N/2 = 0; \quad x \equiv p_{11} \equiv p_{22}.$$

Từ đó ta có

$$p_{11} = p_{22} = \alpha N \left(\sqrt{1 + N_0 / 2\alpha^2 N} - 1 \right) = p. \tag{2.77}$$

Như vậy, sai số của các ước lượng là độc lập, còn phương sai của sai số bằng nhau $p_{11} = p_{22}$. Lúc này PTVP ước lượng của bộ lọc là

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} &= -\alpha\hat{\lambda}_1 + \frac{p}{N} \left[2x(t) \cos \omega_0 t - \hat{\lambda}_1 \right]; \\
\frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} &= -\alpha\hat{\lambda}_2 + \frac{p}{N} \left[2x(t) \sin \omega_0 t - \hat{\lambda}_2 \right].
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Phân bố hậu nghiệm của $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ là Gaus với các kỳ vọng $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ và ma trận hàm tương quan R có các phần tử xác định theo (2.76) tức là

$$p(t, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2\pi p} \exp \left\{ -\frac{[\lambda_1 - \hat{\lambda}_1(t)]^2}{2p} - \frac{[\lambda_2 - \hat{\lambda}_2(t)]^2}{2p} \right\}.$$

Sử dụng biến đổi hàm (2.70) và công thức chuyển đổi mật độ xác suất, nhận được mật độ xác suất hậu nghiệm của đường bao biên độ và của pha

$$p(t, A) = \frac{A}{p} \exp \left(-\frac{A^2 + \dot{A}^2}{2p} \right) I_0 \left(\frac{A \dot{A}}{p} \right), \tag{2.79}$$

$$p(t, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\check{A}^2}{2p}\right) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{2\pi}{p}} \check{A} \cos(\varphi - \hat{\varphi}) \times \right. \\ \left. \times \Phi\left[\frac{\check{A}}{\sqrt{p}} \cos(\varphi - \hat{\varphi})\right] \exp\left[\frac{\check{A}^2}{2p} \cos^2(\varphi - \hat{\varphi})\right] \right\}, \quad |\varphi - \hat{\varphi}| \leq \pi, \quad (2.80)$$

$$\text{Trong đó: } \check{A}(t) = \sqrt{\hat{\lambda}_1^2(t) + \hat{\lambda}_2^2(t)}; \hat{\varphi}(t) = \arctg \frac{\hat{\lambda}_2(t)}{\hat{\lambda}_1(t)}; \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

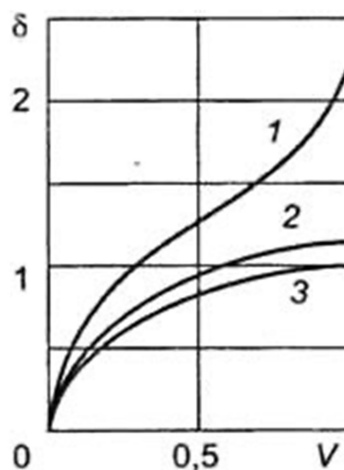
- Tích phân xác suất (tích phân bố xác suất theo lấy tích phân mật độ phổ xác suất).

Mật độ xác suất hậu nghiệm của pha $p(t, \varphi)$ là đối xứng với ước lượng $\hat{\varphi}(t)$. Do vậy $\hat{\varphi}(t)$ là ước lượng tối ưu của pha theo chỉ tiêu cực đại mật độ xác suất hậu nghiệm và cực tiểu bình phương sai số quân phương của sai số. Nhưng lại không đúng như vậy cho ước lượng đường bao biên độ. Đôi khi có thể gần đúng chấp nhận ước lượng đường bao biên độ dạng $\check{A}(t) = \sqrt{\hat{\lambda}_1^2(t) + \hat{\lambda}_2^2(t)}$.

Hình 2-5 thể hiện sự phụ thuộc của sai số của từng ước lượng từ ba ước lượng vào sai số các thành phần trực giao. Theo trục tung tọa độ đặt phương sai trung bình quân phương định chuẩn của sai số ước lượng

$$\delta = \sqrt{E\{(A_i - A)^2\} / D_A},$$

Trong đó: $D_A = D(2 - \pi/2)$ - phương sai tiền nghiệm của đường bao; D - Phương sai tiền nghiệm của λ_1, λ_2 . Ngoài ra $A_1 = \check{A}, A_2 = A^*, A_3 = \hat{A}$. Theo trục hoành tọa độ, đặt $V = p/D$ - phương sai định chuẩn của sai số các ước lượng $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$. Đường cong 1 tương ứng ước lượng gần đúng $\check{A}$, đường cong 2 - A^* . đường cong 3 - $\hat{A}$. Ước lượng $\hat{A}$ là tối ưu theo chỉ tiêu cực tiểu trung bình bình phương sai số, như vậy sẽ ưu việt hơn hai kiểu ước lượng kia theo chỉ tiêu này. Tuy vậy khi cần có độ chính xác cao để ước lượng hai thành phần thông tin trực giao (điều kiện $V < 0,1$), thì cả ba dạng ước lượng thực tế đều tương đương. Nếu điều kiện này không thực hiện được, mà dùng các ước lượng A^* và, đặc biệt $\check{A}$, sẽ khiến giảm đáng kể độ chính xác ước lượng khi so sánh với dùng ước lượng $\hat{A}$. Khi $V \rightarrow 1$ ước lượng $\check{A}$ có sai số quân phương gấp 2,15 lần lớn hơn sai lệch quân phương tiền nghiệm của đường bao.



Hình 2-5: Sự phụ thuộc sai số ước lượng vào phương sai

Trong chương 2, chúng tôi đã xây dựng và trình bày các phương pháp tính toán bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục trong không gian nhiều chiều dưới dạng ma trận. Nội dung chương bao gồm việc thiết lập các phương trình cơ bản, phương pháp xác định ma trận trọng số và ma trận hiệp phương sai, cùng các bước cụ thể để triển khai bộ lọc Kalman trong thực tế.

Việc mở rộng từ dạng vô hướng sang dạng ma trận đã giúp mô tả chính xác hơn các hệ thống phức tạp và tạo tiền đề cho các ứng dụng thực tiễn trong môi trường nhiều biến. Đây là bước quan trọng để chuẩn bị cho việc áp dụng bộ lọc Kalman vào các bài toán cụ thể, đặc biệt là trong các hệ thống bị ảnh hưởng bởi tạp âm và nhiễu.

Ở chương tiếp theo, chúng tôi sẽ tập trung vào ứng dụng của bộ lọc Kalman để xây dựng máy thu tín hiệu tối ưu hoạt động hiệu quả trên nền tạp âm và nhiễu, qua đó minh chứng tính khả thi và hiệu quả của các phương pháp đã phát triển.

CHƯƠNG 3: ỨNG DỤNG LỘC KALMAN XÂY DỰNG MÁY THU TỐI ƯU TRÊN NỀN TẠP ÂM VÀ NHIỄU

Trong hai chương trước, chúng tôi đã trình bày cơ sở lý thuyết và phương pháp tính toán của bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục, từ dạng vô hướng đến dạng ma trận cho các hệ thống nhiều chiều. Các kết quả này đã tạo nên nền tảng vững chắc cho việc áp dụng bộ lọc Kalman vào các hệ thống thực tế. Tuy nhiên, trong môi trường thực tế, tín hiệu thường bị ảnh hưởng bởi tạp âm và nhiễu, khiến việc thu nhận tín hiệu chính xác trở thành một thách thức lớn. Điều này đòi hỏi phải thiết kế các máy thu tín hiệu tối ưu có khả năng loại bỏ ảnh hưởng của nhiễu, đồng thời đảm bảo độ chính xác cao trong ước lượng trạng thái hệ thống. Chương này tập trung vào việc áp dụng bộ lọc Kalman trong xây dựng máy thu tín hiệu tối ưu. Cụ thể, tôi sẽ trình bày cách thiết kế cấu trúc máy thu, phương pháp tối ưu hóa hệ thống để giảm thiểu tác động của nhiễu.

3.1. Xây dựng cấu trúc máy thu tối ưu

Cho biết trước phương trình kênh quan sát

$$x(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + n(t), \quad (3.1)$$

Trong đó: $\lambda_1(t)$ - thông tin hữu ích; $\lambda_2(t)$ - nhiễu; $n(t)$ - tạp trắng Gauss có $R_n(\tau) = S_0\delta(\tau)$.

Xây dựng bộ lọc lấy ra thông tin $\lambda_1(t)$ trong nhiễu tạp trắng $n(t)$ và nhiễu $\lambda_2(t)$ có phổ dạng tương tự phổ thông tin và xen lẫn chồng nhau.

Phương trình trạng thái tiên nghiệm

$$\begin{aligned} d\lambda_1 / dt &= -\alpha_1\lambda_1 + w_1(t); \\ d\lambda_2 / dt &= -\alpha_2\lambda_2 + w_2(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

Trong đó: $w_1(t)$ và $w_2(t)$ - các tạp trắng độc lập có kỳ vọng bằng 0 và hàm tương quan

$$R_1(\tau) = S_1\delta(\tau); \quad R_2(\tau) = S_2\delta(\tau) \quad (3.3)$$

Các phương trình tiên nghiệm ở dạng ma trận

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda} + n(t); \quad \mathbf{H} = [1, 1]; \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^T; \quad (3.4)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{F}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{w}(t), \quad (3.5)$$

Trong đó:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

Các ma trận $\mathbf{H}$, $\mathbf{F}$ là hằng số, và mô hình tuyến tính nên bài toán là lọc tối ưu tuyến tính.

Do vậy, phương trình lọc Kalman có dạng

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = \mathbf{F}\hat{\lambda} + \mathbf{D}\mathbf{H}^T S_0^{-1} \left[x(t) - (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2) \right]. \quad (3.6)$$

Ký hiệu: $\mathbf{D}\mathbf{H}^T = (a_1, a_2)^T$; $a_1 = d_{11} + d_{12}$; $a_2 = d_{12} + d_{22}$; $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T$; $k_1 = S_0^{-1}a_1$; $k_2 = S_0^{-1}a_2$, trong đó - các phần tử ma trận phương sai $\mathbf{D}$; $\mathbf{k}$ - hệ số khuếch đại lọc Kalman.

Ở dạng vô hướng (3.6) sẽ là

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} &= -\alpha_1 \hat{\lambda}_1 + a_1 S_0^{-1} z - a_1 S_0^{-1} \hat{\lambda}_1 - a_1 S_0^{-1} \hat{\lambda}_2 \\ \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} &= -\alpha_2 \hat{\lambda}_2 + a_2 S_0^{-1} z - a_2 S_0^{-1} \hat{\lambda}_1 - a_2 S_0^{-1} \hat{\lambda}_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Đặt thời gian chuẩn hóa $\tau = \alpha_1 t$ và toán tử $p = d/dt$, chuyển hệ PTVP (3.7) về dạng toán tử p

$$\begin{pmatrix} p+1+\beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & p+\alpha+\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} z, \quad (3.8)$$

Trong đó: $\beta_1 = a_1 S_0 / \alpha_1 = k_1 / \alpha_1$; $\beta_2 = a_2 S_0 / \alpha_1 = k_2 / \alpha_1$; $\alpha = \alpha_2 / \alpha_1$.

Suy ra các hàm truyền đạt theo tín hiệu $H_1(p)$ và theo nhiễu $H_2(p)$:

$$H_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad H_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (3.9)$$

Trong đó

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} p+1+\beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & p+\alpha+\beta_2 \end{vmatrix} = (p+1+\beta_1)(p+\alpha+\beta_2) - \beta_1\beta_2 = \\ &= (p^2 + \alpha + \beta_2 + \beta_1\alpha) + (1 + \alpha + \beta_1 + \beta_2)p \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta + \alpha + \beta_2 \end{vmatrix} = \beta_1(p + \alpha); \Delta_2 = \begin{vmatrix} p+1+\beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \beta_2(p+1) \end{aligned}$$

Đặt $p = j\Omega$; $\Omega = \omega / \alpha_1$, tìm bình phương modul đặc tính tần số

$$|H_1(i\Omega)|^2 = \frac{\beta_1^2 (\alpha^2 + \Omega^2)}{(\alpha + \beta_2 + \beta_1 \alpha - \Omega^2)^2 + (1 + \alpha + \beta_1 + \beta_2)^2 \Omega^2}; \quad (3.10)$$

$$|H_2(i\Omega)|^2 = \frac{\beta_2^2 (1 + \Omega^2)}{(\alpha + \beta_2 + \beta_1 \alpha - \Omega^2)^2 + (1 + \alpha + \beta_1 + \beta_2)^2 \Omega^2} \quad (3.11)$$

Từ đó xét tỷ số

$$\varepsilon = \frac{|H_1(i\Omega)|}{|H_2(i\Omega)|} = \frac{\beta_1 \sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}}{\beta_2 \sqrt{1 + \Omega^2}}$$

Trường hợp

$$\varepsilon_{\Omega \rightarrow \infty} \rightarrow (\beta_1 / \beta_2) = \varepsilon_\infty; \quad \varepsilon(0) = (\beta_1 \alpha / \beta_2) = \alpha \varepsilon_\infty = \varepsilon_0.$$

Phương trình phương sai

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{D}\mathbf{H}^T S_0^{-1} \mathbf{H}\mathbf{D}; \quad \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0 \quad (3.12)$$

Do $G = I(I - \text{ma trận đơn vị})$. Không khó thấy được

$$\mathbf{F}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} -2\alpha_1 d_{11} & -(\alpha_1 + \alpha_2) d_{12} \\ -(\alpha_1 + \alpha_2) d_{12} & -2\alpha_2 d_{22} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}\mathbf{H}^T S_0^{-1} \mathbf{H}\mathbf{D} = S_0^{-1} \mathbf{D}\mathbf{H}^T \mathbf{H}\mathbf{D} = S_0^{-1} \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{D},$$

Trong đó: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$\mathbf{D}\mathbf{H}^T S_0^{-1} \mathbf{H}\mathbf{D} = S_0^{-1} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} = S_0^{-1} \mathbf{M}.$$

Từ đó hệ PTVP cho các phần tử $d_{kn}, k, n = 1, 2$ của ma trận $\mathbf{D}$

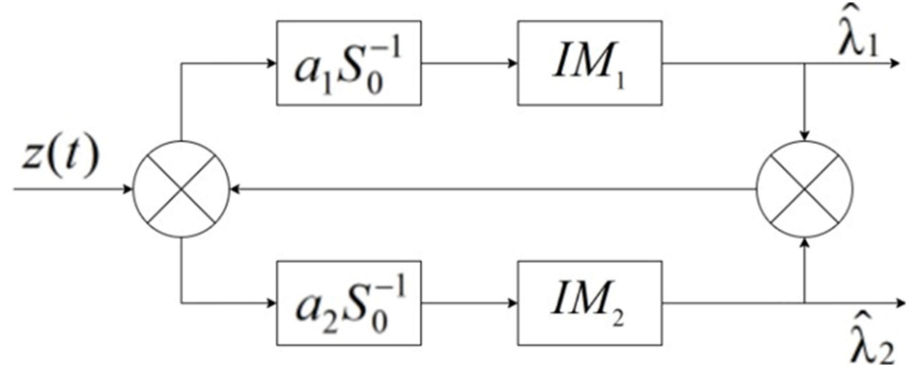
$$\begin{aligned} d(d_{11}) / dt &= S_1 - 2\alpha_1 d_{11} - S_0^{-1} a_1^2 \\ d(d_{22}) / dt &= S_2 - 2\alpha_2 d_{22} - S_0^{-1} a_2^2 \\ d(d_{12}) / dt &= -(\alpha_1 + \alpha_2) d_{12} - S_0^{-1} a_1 a_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Đặt thời gian chuẩn hóa $\tau = \alpha_1 t$. Nhận được hệ PTVP

$$\begin{aligned} d(d_{11}) / d\tau &= S_1 / \alpha_1 - 2d_{11} - S_0^{-1} a_1^2 / \alpha_1; \\ d(d_{22}) / d\tau &= S_2 / \alpha_1 - 2\alpha d_{22} - S_0^{-1} a_2^2 / \alpha_1; \\ d(d_{12}) / d\tau &= -(1 + \alpha) d_{12} - S_0^{-1} a_1 a_2 / \alpha_1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Chuyển (3.7) về dạng

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dt} + \alpha_1 \lambda_1 &= a_1 S_0^{-1} [x - (\lambda_1 + \lambda_2)] \\ \frac{d\lambda_2}{dt} + \alpha_2 \lambda_2 &= a_2 S_0^{-1} [x - (\lambda_1 + \lambda_2)].\end{aligned}\quad (3.15)$$



Hình 3-1: Sơ đồ cấu trúc bộ lọc tối ưu

Trên Hình 3-1 các mạch lấy tích phân IM_1 và IM_2 có hàm truyền đạt

$$H_1(s) = \frac{1}{s + \alpha_1}; \quad H_2(s) = \frac{1}{s + \alpha_2}. \quad (3.16)$$

Máy thu có hai kênh đối xứng lọc thông tin $\lambda_1(t)$ và nhiễu $\lambda_2(t)$.

Cần thiết giải hệ PTVP (3.4) để xác định sai số lọc.

Xét chế độ dừng, sơ bộ chia các phương trình cho α_1 , ký hiệu

$$d_{11} / \alpha_1 = \delta_{11}, \quad d_{22} / \alpha_1 = \delta_{22}, \quad d_{12} / \alpha_1 = \delta_{12}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}2\delta_{11} + S_0 \beta_1^2 &= S_1 / \alpha_1^2 = q_1; \\ 2\alpha \delta_{22} + S_0 \beta_2^2 &= S_2 / \alpha_1^2 = q_2; \\ (1 + \alpha) \delta_{12} + S_0 \beta_1 \beta_2 &= 0.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Ở đây

$$\begin{aligned}q_1 &= 2\sigma_1^2 / \alpha_1; \quad \sigma_1^2 = S_1 / 2\alpha_1; \quad q_2 = (\sigma_2^2 / \sigma_1^2) \alpha q_1 = \gamma^2 \alpha q_1; \\ \sigma_2^2 &= S_2 / 2\alpha_2; \quad \gamma = \sigma_2 / \sigma_1.\end{aligned}$$

Biểu thức cho $\sigma_i^2 (i=1,2)$ tìm theo PTVP (3.2), khi đó

$$S_{\lambda_i}(\bar{\omega}) = S_i |H_i(i\omega)|^2 = \frac{S_i}{|\alpha_i + i\omega|^2} = \frac{S_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} = \frac{S_i}{2\alpha_i} \frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2}.$$

Hàm tương quan

$$R_{\lambda_i}(\tau) = (S_i / 2\alpha_i) e^{-\alpha_i|\tau|} = \sigma_i^2 e^{-\alpha_i|\tau|}$$

Xét ví dụ:

$$\alpha = \alpha_2 / \alpha_1 = 0,1; \quad q_1 = 2\sigma_1^2 / \alpha_1 = 1; \quad \gamma^2 = (\sigma_2 / \sigma_1)^2 = 0,5; \\ q_2 = 0,5; \quad S_0^{-1} = 40.$$

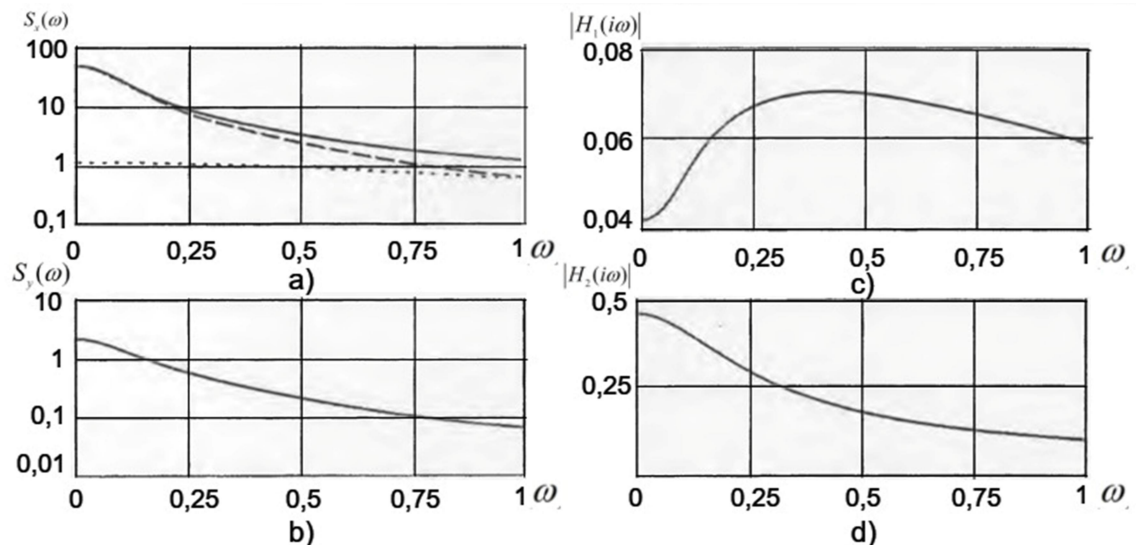
$$\text{Khi đó } \beta_1 = 0,089; \quad \beta_2 = 0,104; \quad \varepsilon_\infty = 0,856; \quad \varepsilon_0 = 0,086.$$

Ở lõi vào với tín hiệu, nhiễu, tạp trắng cộng tính, nên mật độ phổ tổng là

$$S_x(\omega) = S_{\lambda_1}(\omega) + S_{\lambda_2}(\omega) + S_0 = \sigma_1^2 \frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega^2} + \sigma_2^2 \frac{2\alpha_2}{\alpha_2^2 + \omega^2} + S_0 = \\ = \frac{2\sigma_1^2}{\alpha_1} \left(\frac{1}{1 + \Omega^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha} \frac{1}{1 + \Omega^2 / \alpha^2} + \frac{1}{4q} \right), \quad (3.18)$$

Trong đó: $q = \sigma_1^2 / 2\alpha_1 S_0$ - nghịch đảo cường độ phổ tạp trắng.

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) |H_1(i\omega)|^2 \text{ và } \omega \equiv \Omega.$$



Hình 3-2: Biểu diễn: a- phổ tín hiệu và nhiễu ở lõi vào; b- phổ lõi ra kênh lọc tín hiệu; c- đặc tính biên độ tần số theo tín hiệu; d- đặc tính biên độ tần số theo nhiễu;

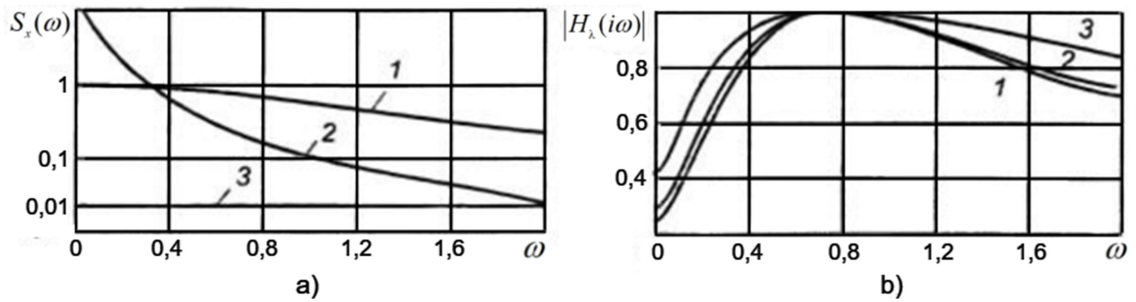
Đặt chuẩn hóa $\delta_1^2 = d_{11} / \sigma_1^2$ - bình phương sai số tương đối lọc tín hiệu $\lambda_1(t)$; $\delta_2^2 = d_{22} / \sigma_2^2$ - bình phương sai số tương đối lọc nhiễu $\lambda_2(t)$; $\delta_3^2 = d_{12} / \sigma_1 \sigma_2$.

Với kết quả này, từ (3.14) nhận được hệ PTVP

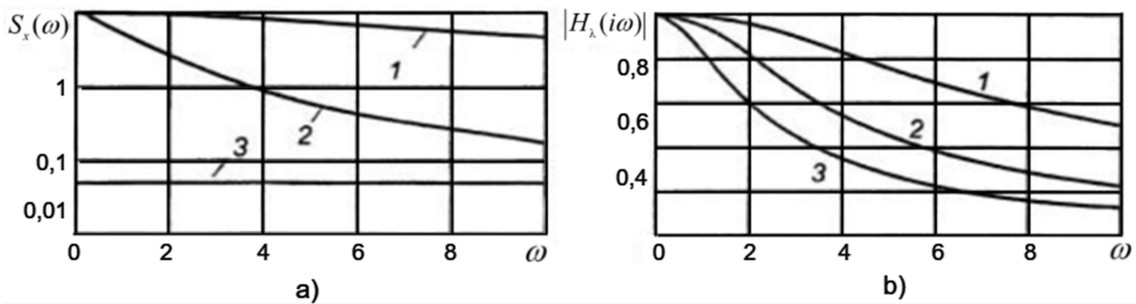
$$\begin{aligned}
d(\delta_1^2)/d\tau &= 2 - 2\delta_1^2 - 2q(\delta_1^2 + \gamma\delta_3^2)^2 \\
\alpha^{-1}[d(\delta_1^2)/d\tau] &= 2 - 2\delta_2^2 - 2q\gamma^{-2}(\delta_2^2 + \gamma^{-1}\delta_3^2)^2; \\
d(\delta_3^2)/d\tau &= -(1+\alpha)\delta_3^2 - 2q(\delta_1^2 + \gamma\delta_3^2)(\delta_3^2 + \gamma^{-1}\delta_2^2),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Trong đó: $\gamma = \sigma_2 / \sigma_1$; $\alpha = \alpha_2 / \alpha_1$; $q = S_0^{-1}\sigma_1^2 / (2\alpha_1)$.

Với các thông số khác của thông tin và quan sát cho lọc Kalman, tiến hành xây dựng các đồ thị Hình 3-3 – Hình 3-6.



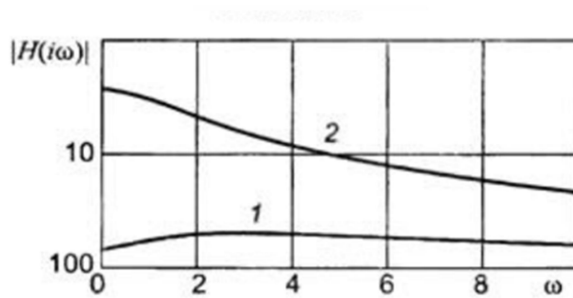
Hình 3-3: Đồ thị phổ lượng vào và đồ thị DTBĐTS với $\alpha_1 / \alpha_2 = 10$



Hình 3-4: Đồ thị phổ lượng vào và đồ thị DTBĐTS với $\alpha_1 / \alpha_2 = 0,1$

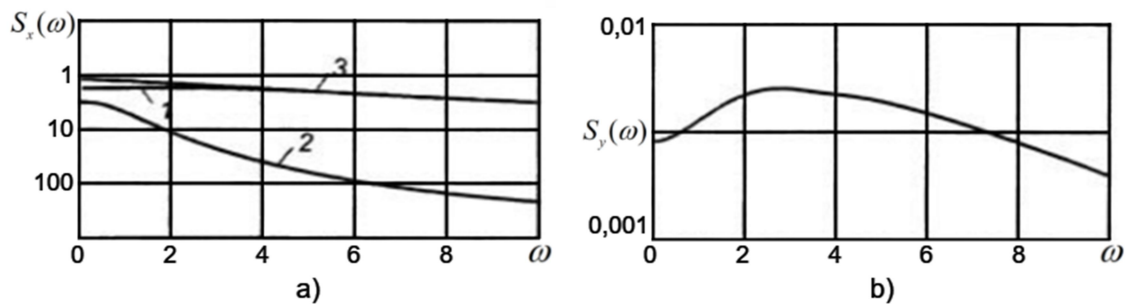
Trên Hình 3-3 a- thể hiện các phổ tín hiệu $S_{\lambda_1}(\omega)$ – đường cong 1; $S_{\lambda_2}(\omega)$ – đường cong 2; và phổ tạp trắng – đường cong 3; trên Hình 3-3 b thể hiện đồ thị DTBĐTS (đặc tính biên độ tần số) $|H_1(i\omega)|$ theo tín hiệu (các đường cong 1-3 tại cường độ phổ tạp trắng tương ứng $\eta = 1; 10; 100$; trong tất các trường hợp $\alpha_1 / \alpha_2 = 10$).

Theo trình tự này, thực hiện tính toán các đồ thị trên Hình 3-4 tại $\alpha_1 / \alpha_2 = 0,1$, còn các đường cong 1-3 tại cường độ phổ tạp trắng $0,1; 1; 10$ [$\eta = \sigma^2 / (\sigma_2^2 + S_0\alpha)$].



Hình 3-5: Đồ thị ĐTBĐTS theo tín hiệu tại $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,1; S_0 = 20; S_1 = 0,25; S_2 = 0,5$.

Trên Hình 3-5 mô tả đồ thị ĐTBĐTS theo tín hiệu $|H_1(i\omega)|$ (đường cong 1) và theo nhiễu $|H_2(i\omega)|$ (đường cong 2) tại $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,1; S_0 = 20; S_1 = 0,25; S_2 = 0,5$.



Hình 3-6: Đồ thị phổ lượng vào và ra tại $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,1; S_0 = 20; S_1 = 0,5; S_2 = 0,25$.

Trên Hình 3-6 a – thể hiện phổ tín hiệu $S_{\lambda_1}(\omega)$ (đường cong 1), phổ nhiễu $S_{\lambda_2}(\omega)$ (đường cong 2) và phổ lượng vào bộ lọc $S_x(\omega)$ (đường cong 3); Hình 3-6 b thể hiện phổ lượng ra $S_y(\omega)$ tại $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,1; S_0 = 20; S_1 = 0,5; S_2 = 0,25$.

Từ các Hình 3-2 – 3.6, thấy rõ với các giá trị thông số được xét, đã nhận được ý nghĩa vật lý lọc tối ưu chế áp nhiễu, tại đó ĐTBĐTS theo tín hiệu là tối thiểu trên dải tần số này trong điều kiện mức nhiễu lớn và mức tín hiệu nhỏ, và sẽ tăng khi ngược lại, còn, ĐTBĐTS theo nhiễu sẽ tối thiểu khi mức tín hiệu lớn và mức nhiễu nhỏ, trường hợp ngược lại ĐTBĐTS theo nhiễu sẽ tăng lên.

Như vậy, thuật toán nhận được cho phép xây dựng sơ đồ hiệu quả bù khử nhiễu. Từ Hình 3-3 b thấy rằng phổ lượng ra sẽ chế áp (làm giảm) nhiễu mạnh hơn ở các tần số, mà tại đó thành phần nhiễu có mức lớn.

Theo các phương trình (3.2), phân tích bộ bù khử nhiễu nêu trên mới chỉ với tín hiệu và nhiễu ở trong vùng thấp tần. Có thể mở rộng bài toán này sang bộ bù khử nhiễu dải thông hẹp (trong vùng trung tần và cao tần), được giải quyết ở mục tiếp sau đây.

3.2. Xây dựng hệ tối ưu có tính đến bù khử nhiễu phổ hẹp vùng tần số cao

Xét các QTNN có dải phổ tần hẹp ở dạng hai thành phần QTNN Marcov

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) \cos \omega t + \lambda_2(t) \sin \omega t. \quad (3.20)$$

Giả định, các thành phần cầu phương $\lambda_1(t)$ và $\lambda_2(t)$ được mô tả bởi các PTVPNN

$$\begin{aligned} d\lambda_1 / dt &= -\alpha\lambda_1(t) + n_1(t) \\ d\lambda_2 / dt &= -\alpha\lambda_2(t) + n_2(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Trong đó: $n_1(t)$ và $n_2(t)$ là các tạp trắng Gauss độc lập với cường độ phổ $S_1(\omega) = S_2(\omega) = r_\lambda$.

Như vậy, từ (3.21) suy ra bộ lọc tạo hình (LTH) có hàm truyền đạt $H(p) = 1/(p + \alpha)$ cho $\lambda_1(t)$ và $\lambda_2(t)$, do đó mật độ phổ lượng ra LTH là

$$S_2(\omega) = \frac{r_\lambda}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{r_\lambda}{2\alpha} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

Lưu ý, các hàm tương quan của $\lambda_1(t)$ và $\lambda_2(t)$ là

$$R_{\lambda_1}(\tau) = R_{\lambda_2}(\tau) = r_\lambda / (2\alpha) e^{-\alpha|\tau|}$$

Từ (3.20), thấy QTNN $\lambda(t)$ có hàm tương quan $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega \tau$. $\omega \gg \alpha$; $\sigma_\lambda^2 = r_\lambda / (2\alpha)$. (3.22)

Lấy đạo hàm QTNN λ :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\lambda_1}{dt} \cos \omega t - \omega \lambda_1 \sin \omega t + \frac{d\lambda_2}{dt} \sin \omega t + \omega \lambda_2(t) \cos \omega t.$$

Kết quả

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\alpha\lambda(t) - \omega\mu(t) + n_1(t) \cos \omega t + n_2(t) \sin \omega t, \quad (3.23)$$

Trong đó: $\mu(t) = \lambda_1(t) \sin \omega t - \lambda_2(t) \cos \omega t$.

Còn đạo hàm của $\mu(t)$

$$d\mu / dt = -\alpha\mu(t) + \omega\lambda(t) + n_1(t) \sin \omega t - n_2(t) \cos \omega t, \quad (3.24)$$

Lưu ý, các PT (3.22) và (3.23) mô tả mô hình tín hiệu QTNN $\lambda(t)$.

Còn kênh quan sát

$$z(t) = s(t) + \lambda(t) + n_0(t) \quad (3.25)$$

Trong đó: $s(t)$ - tín hiệu hữu ích dải phổ hẹp; $\lambda(t)$ - nhiễu phổ hẹp; $n_0(t)$ - tạp nhiễu trắng kênh quan sát với kỳ vọng bằng 0 và hàm tương quan $R(\tau) = S_0\delta(\tau)$.

Các thành phần $s(t)$ và $\lambda(t)$ có mô hình dạng

$$\begin{aligned} ds/dt &= -\alpha s(t) - \omega_0 r(t) + n_1 \cos \omega_0 t + n_2 \sin \omega_0 t \\ dr/dt &= -\alpha r(t) + \omega_0 s(t) + n_1 \sin \omega_0 t - n_2 \cos \omega_0 t \\ d\lambda/dt &= -\beta \lambda(t) - \omega_1 \mu(t) + n_3 \cos \omega_1 t + n_4 \sin \omega_1 t; \\ d\mu/dt &= -\beta \mu(t) + \omega_1 \lambda(t) + n_3 \sin \omega_1 t - n_4 \cos \omega_1 t \end{aligned}$$

Trong đó: $n_1 = n_1(t), n_2 = n_2(t), n_3 = n_3(t), n_4 = n_4(t)$ - các tạp trắng Gauss độc lập với kỳ vọng xác suất bằng 0 và mật độ phổ dạng

$$S_1(\omega) = S_2(\omega) = r_s; \quad S_3(\omega) = S_4(\omega) = r_\lambda;$$

Ở dạng ma trận

$$\begin{aligned} d\lambda_1/dt &= \mathbf{F}_1 \lambda_1 + \mathbf{G}_1 \mathbf{n}_1 \\ d\lambda_2/dt &= \mathbf{F}_2 \lambda_2 + \mathbf{G}_2 \mathbf{n}_2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Trong đó: $\lambda_1 = (s, r)^T; \lambda_2 = (\lambda, \mu)^T; \mathbf{n}_1 = (n_1, n_2)^T; \mathbf{n}_2 = (n_3, n_4)^T$;

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} -\alpha & -\omega_0 \\ \omega_0 & -\alpha \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} -\beta & -\omega_1 \\ \omega_1 & -\beta \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t & -\cos \omega_0 t \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ \sin \omega_1 t & -\cos \omega_1 t \end{pmatrix}.$$

Đặt véc tơ mở rộng $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, khi đó hệ các PT tiền nghiệm ở dạng phù hợp hơn

$$d\lambda/dt = \mathbf{F}\lambda + \mathbf{G}\mathbf{n} \quad (3.27)$$

Trong đó: $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)^T; \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_2 \end{pmatrix}; \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 \end{pmatrix}; \lambda = (s, r, \lambda, \mu)^T$.

Các ước lượng tối ưu $\hat{s}$ và $\hat{\lambda}$ có thể nhận từ phương trình lọc Kalman ở dạng ma trận. Do phương trình kênh quan sát (3.25) là vô hướng, nên hệ số khuếch đại có dạng đơn giản hơn

$$\mathbf{K} = (1/S_0) \mathbf{D} \mathbf{H}^T = (1/S_0) (a_1, a_2, a_3, a_4)^T = (k_1, k_2, k_3, k_4)^T,$$

Trong đó:

$$\mathbf{D} = \{d_{ik}\}, i, k = \overline{1, 4}; \mathbf{H} = (1.0, 1, 0); a_1 = d_{11} + d_{13} = d_{11} + d_{31} \\ a_2 = d_{21} + d_{23} = d_{12} + d_{23}; a_3 = d_{31} + d_{33} = d_{13} + d_{33}; a_4 = \\ = d_{41} + d_{43} = d_{14} + d_{34}$$

Phương trình ước lượng lọc Kalman

$$d\hat{\lambda} / dt = \mathbf{F}\hat{\lambda}(t) + \mathbf{K}[x(t) - \mathbf{H}\hat{\lambda}] \quad (3.28)$$

Trong đó: $\hat{\lambda} = (\hat{s}, \hat{r}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})^T$

Ma trận phương sai $\mathbf{D}$ thỏa thuận PT Ricatti

$$d\mathbf{D} / dt = \mathbf{F}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - (1 / S_0)\mathbf{D}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{D}; \quad \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0, \\ d\mathbf{D} / dt = 0 \quad (3.29)$$

$$\text{Trong đó: } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}_1 = r_s \mathbf{I}; \quad \mathbf{Q}_2 = r_\lambda \mathbf{I}$$

Xét chế độ dừng khi $d\mathbf{D} / dt = 0$, và tìm ĐTBĐTS của lọc Kalman theo tín hiệu và nhiễu. Khi đó $\mathbf{D}$ thỏa mãn phương trình đại số

$$\mathbf{F}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - (1 / S_0)\mathbf{D}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{D} = 0$$

Viết ma trận $\mathbf{D}$ ở dạng khối

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_3 & \mathbf{D}_4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} d_{13} & d_{14} \\ d_{23} & d_{24} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} d_{31} & d_{32} \\ d_{41} & d_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{13} & d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_4 = \begin{pmatrix} d_{33} & d_{34} \\ d_{43} & d_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{33} & d_{34} \\ d_{34} & d_{44} \end{pmatrix}$$

Nhận thấy

$$\mathbf{F}\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_3 & \mathbf{D}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1\mathbf{D}_1 & \mathbf{F}_1\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{F}_2\mathbf{D}_3 & \mathbf{F}_2\mathbf{D}_4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_3 & \mathbf{D}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^T & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1\mathbf{F}_1^T & \mathbf{D}_2\mathbf{F}_2^T \\ \mathbf{D}_3\mathbf{F}_1^T & \mathbf{D}_4\mathbf{F}_2^T \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}\mathbf{H}^T = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T; \quad \mathbf{H}\mathbf{D} = (a_1, a_2, a_3, a_4);$$

$$\mathbf{D}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & a_3a_4 \\ a_1a_4 & a_2a_4 & a_3a_4 & a_4^2 \end{pmatrix} = \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix}$$

Tính phép nhân

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_s \mathbf{I} & 0 \\ 0 & r_\lambda \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 r_s \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 r_\lambda \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s \mathbf{G}_1^2 & 0 \\ 0 & r_\lambda \mathbf{G}_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s \mathbf{I} & 0 \\ 0 & r_\lambda \mathbf{I} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

bởi vì $\mathbf{G}_1^2 = \mathbf{G}_2^2 = \mathbf{I}$.

Sau khi biến đổi, nhận được 16 PT đối với các phần tử ma trận $\mathbf{D}$. Do ma trận $\mathbf{D}$ là đối xứng, nên chỉ cần dùng 10 PT sau cho tính toán các phần tử

$$\begin{aligned} 2\alpha d_{11} + 2\omega_0 d_{12} + S_0^{-1} a_1^2 &= r_s \\ 2\alpha d_{12} + 2\omega_0 d_{22} - \omega_0 d_{11} + S_0^{-1} a_1 a_2 &= 0; \\ (\alpha + \beta) d_{13} + \omega_0 d_{23} + \omega_1 d_{14} + S_0^{-1} a_1 a_3 &= 0; \\ (\alpha + \beta) d_{14} + \omega_0 d_{24} - \omega_1 d_{13} + S_0^{-1} a_1 a_4 &= 0; \\ 2\alpha d_{22} - 2\omega_0 d_{12} + S_0^{-1} a_2^2 &= r_s; \\ (\alpha + \beta) d_{23} - \omega_0 d_{13} + \omega_1 d_{24} + S_0^{-1} a_2 a_3 &= 0; \\ (\alpha + \beta) d_{24} - \omega_0 d_{14} - \omega_1 d_{23} + S_0^{-1} a_2 a_4 &= 0; \\ 2\beta d_{33} + 2\omega_1 d_{34} + S_0^{-1} a_3^2 &= r_\lambda \text{ i} \\ 2\beta d_{34} + \omega_1 d_{44} - \omega_1 d_{33} + S_0^{-1} a_3 a_4 &= 0; \\ 2\beta d_{44} - 2\omega_1 d_{34} + S_0^{-1} a_4^2 &= r_\lambda. \end{aligned}$$

Chuẩn hóa các tham số $d_{ik} (i, k = \overline{1, 4})$, các tần số ω_0, ω_1 , cũng như tham số β , bằng cách chia chúng cho giá trị α . Trong đó $r_s / \alpha^2 = 2\sigma_s^2 / \alpha$, $\sigma_s^2 = r_s / 2\alpha$, $r_\lambda / \alpha^2 = 2\sigma_\lambda^2 / \alpha$. Đặt

$$\begin{aligned} \sigma_s / \sigma_\lambda &= 1; \quad \sigma_s^2 / \alpha = 1; \quad S_0^{-1} = 40; \\ \beta / \alpha &= \gamma = 1; \quad \omega_0 / \alpha = 30 \cdot 10^3; \quad \omega_1 / \alpha = 30,5 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Từ kết quả này, ta có

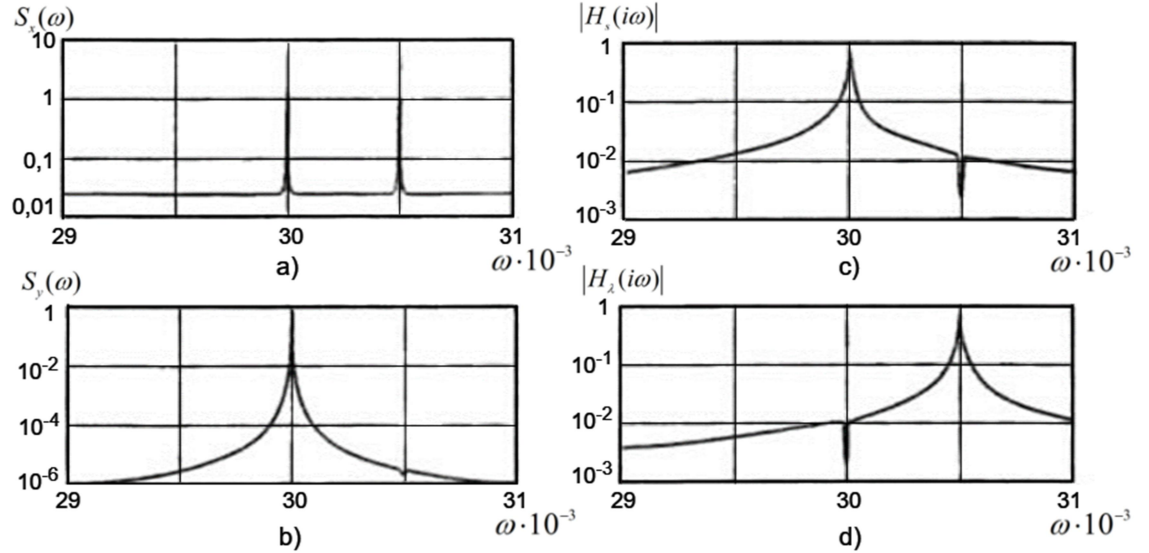
$$\begin{aligned} k_1 &= S_0^{-1} a_1 = 10,805; \quad k_2 = S_0^{-1} a_2 = 0,135; \\ k_3 &= S_0^{-1} a_3 = 12,648; \quad k_4 = S_0^{-1} a_4 = -0,139. \end{aligned}$$

Theo PT kênh quan sát, tìm phổ hiệu dụng

$$S_x(\omega) = S_s(\omega) + S_\lambda(\omega) + S_0 =$$

$$= \frac{\sigma_s^2}{\alpha} \left[\frac{1}{1 + (\Omega - \Omega_0)^2} + \frac{\sigma_\lambda^2}{\gamma \sigma_s^2} \frac{1}{1 + \gamma^2 (\Omega - \Omega_1)^2} + \frac{S_0 \alpha}{\sigma_s^2} \right], \quad (3.31)$$

Trong đó: $\Omega_0 = \omega_0 / \alpha$; $\Omega_1 = \omega_1 / \alpha$; $\Omega = \omega / \alpha$.



Hình 3-7: Phổ hiệu dụng lượng vào kênh quan sát $S_x(\omega)$ và phổ hiệu dụng lượng ra kênh quan sát $S_y(\omega)$

Trong chế độ dừng ở dạng toán tử Laplace, PT lọc Kalman có dạng

$$\mathbf{A}(p)\mathbf{\Lambda}(p) = \mathbf{K}x(p), \quad (3.32)$$

Trong đó

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p + \alpha + k_1 & \omega_0 & k_1 & 0 \\ k_2 - \omega_0 & p + \alpha & k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & p + \beta + k_3 & \omega_1 \\ k_4 & 0 & k_4 - \omega_1 & p + \beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}(p) = \begin{pmatrix} \hat{s}(p) \\ \hat{r}(p) \\ \hat{\lambda}(p) \\ \hat{\mu}(p) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}.$$

Khi đó, hàm truyền đạt theo tín hiệu và theo nhiễu tương ứng là

$$H_s(p) = \Delta_s / \Delta; \quad H_\lambda(p) = \Delta_\lambda / \Delta,$$

Trong đó

$$\Delta_s = [(p + \beta)^2 + \omega_1^2][k_1(\alpha + p) - k_2\omega_0];$$

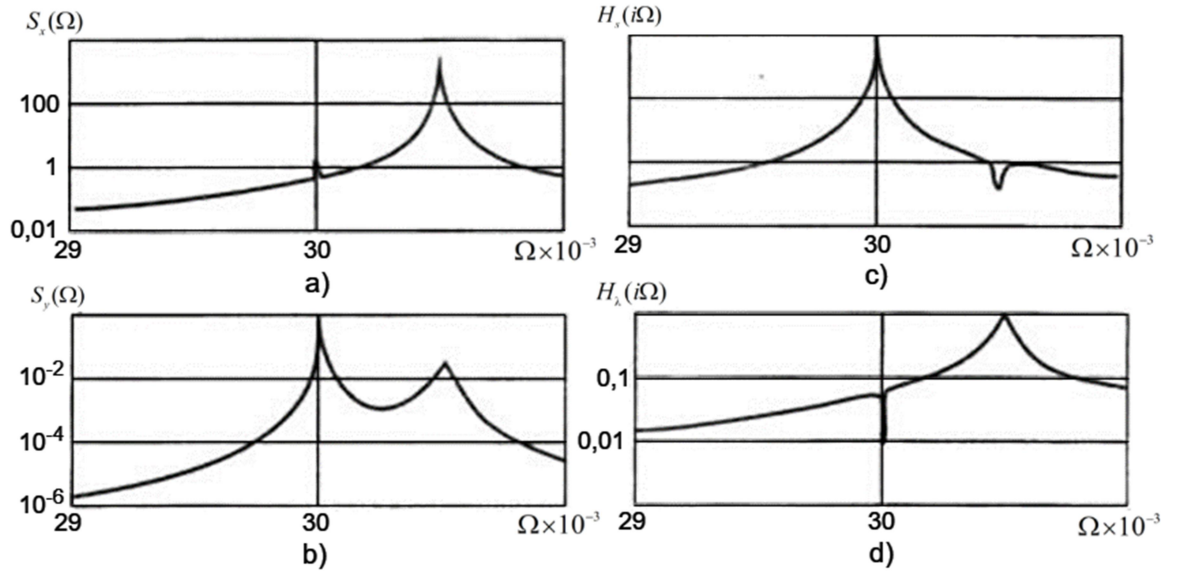
$$\Delta_\lambda = [(p + \alpha)^2 + \omega_0^2][k_3(\beta + p) - k_4\omega_1];$$

$$\Delta = [(\alpha + p)^2 + \omega_0^2][(\beta + p)^2 + \omega_1^2 + k_3(\beta + p) - k_4\omega_1] + \Delta_s$$

Từ đó tìm được các ĐTTS tương ứng

$$H_s(i\omega) = (\omega_1^2 - \omega^2 + \beta^2 + i2\beta\omega)(k_1\alpha - k_2\omega_0 + ik_1\omega) / \Delta(i\omega);$$

$$H_\lambda(i\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha^2 + i2\alpha\omega)(k_3\beta - k_4\omega_1 + ik_3\omega) / \Delta(i\omega),$$



Hình 3-8: Phổ hiệu dụng $S_x(\omega)$ ở lối vào và phổ $S_y(\omega)$ ở lối ra bộ lọc Kalman và các các

ĐTBĐTS theo tín hiệu $S_x(\omega)$ và ĐTBĐTS theo nhiễu $S_y(\omega)$ tại

$$\gamma = 0,1; \sigma_\lambda = 10; \sigma_s = 1; \Omega_1 = 3,05 \cdot 10^4; \Omega_0 = 3 \cdot 10^4.$$

Trong đó

$$\begin{aligned} \Delta(i\omega) = & (\alpha^2 + \omega_0^2 - \omega^2)(\beta^2 + \omega_1^2 - \omega^2 + k_3\beta - k_4\omega_1) - \\ & - 2\alpha(2\beta + k_3)\omega^2 + (\beta^2 + \omega_1^2 - \omega^2)(k_1\alpha - k_2\omega_0) - 2\beta k_1\omega^2 + \\ & + i\left\{ [2\alpha\omega(\beta^2 + \omega_1^2 - \omega^2 + k_3\beta - k_4\omega_1)] + (2\beta + k_3)(\alpha^2 + \omega_0^2 - \omega^2)\omega + \right. \\ & \left. + 2\beta\omega(k_1\alpha - k_2\omega_0) + k_1\omega(\beta^2 + \omega_1^2 + \omega^2) \right\}. \end{aligned}$$

Tiến hành chuẩn hóa theo cách cùng chia tử số và mẫu số cho đại lượng α^4 và xác định các ĐTBĐTS $|H_s(i\omega)|$ và $|H_\lambda(i\omega)|$, ta có được các sự phụ thuộc trên Hình 3-7 b, d với các giá trị tham số đã nêu ($\omega \equiv \Omega$).

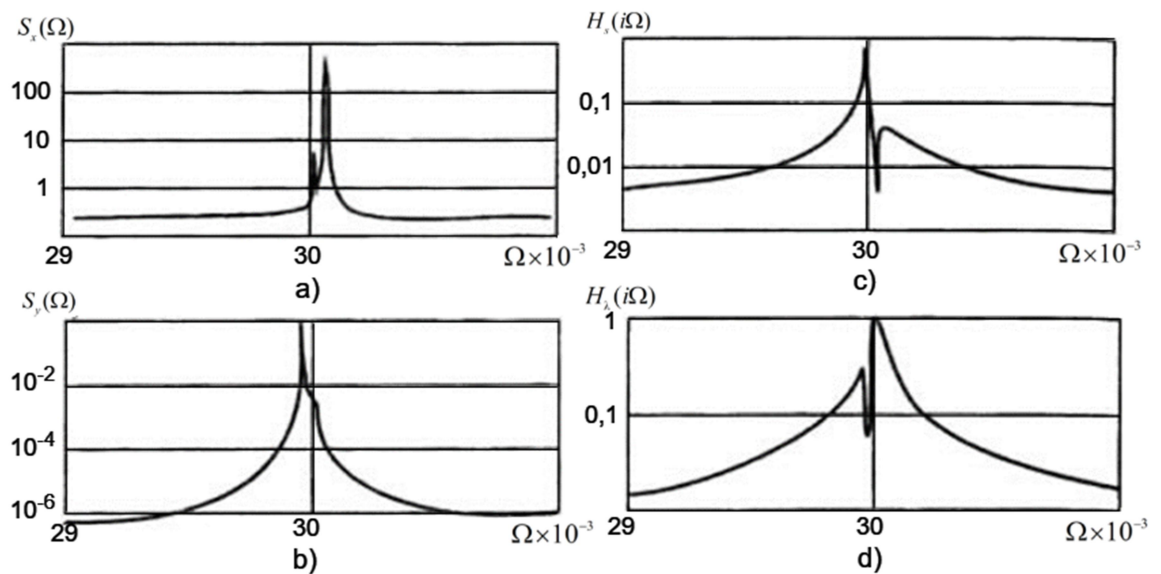
Các đồ thị $|H_s(i\omega)|$ và $|H_\lambda(i\omega)|$ chỉ ra, trường hợp thứ nhất, chế áp mạnh nhiễu được thể hiện khi $|H_\lambda(i\Omega_1)| = 1,487 \cdot 10^{-3}$ so sánh với $|H_1(i\Omega_0)| = 0,844$; $|H_\lambda|/|H_s| = 1,76 \cdot 10^{-3}$,

Trường hợp thứ hai, chế áp mạnh tín hiệu hữu ích $|H_s(i\Omega_0)| = 1,959 \cdot 10^{-3}$ so sánh với $|H_\lambda(i\Omega_1)| = 0,863$, $|H_s|/|H_\lambda| \approx 2,27 \cdot 10^{-3}$. Ở trường đầu hoặc ở trường hợp sau, chế áp đều ở mức hơn 40 dB.

Trên các Hình 3-8 và Hình 3-9 thấy rõ, việc chế áp nhiễu được thực hiện hơn nhiều so với công suất tín hiệu, điều này có được ngay cả khi phổ tín hiệu và phổ nhiễu bị chen xếp chồng nhau.

Trên Hình 3-8 a và b, mô tả phổ hiệu dụng $S_x(\omega)$ ở lối vào và phổ $S_y(\omega)$ ở lối ra bộ lọc Kalman. Trên Hình 3-8 c và d mô tả các ĐTBĐTS theo tín hiệu $S_x(\omega)$ và ĐTBĐTS theo nhiễu $S_y(\omega)$ tại $\gamma = 0,1; \sigma_\lambda = 10; \sigma_s = 1; \Omega_1 = 3,05 \cdot 10^4; \Omega_0 = 3 \cdot 10^4$.

Theo trình tự này cũng tính toán các đặc tính tương tự được mô tả ở Hình 3-9 tại các giá trị $\gamma = 1; \sigma_\lambda = 10; \sigma_s = 1; \Omega_1 = 3,005 \cdot 10^4; \Omega_0 = 3 \cdot 10^4$



Hình 3-9: Phổ hiệu dụng $S_x(\omega)$ ở lối vào và phổ $S_y(\omega)$ ở lối ra bộ lọc Kalman và các các

ĐTBĐTS theo tín hiệu $S_x(\omega)$ và ĐTBĐTS theo nhiễu $S_y(\omega)$ tại

$$\gamma = 1; \sigma_\lambda = 10; \sigma_s = 1; \Omega_1 = 3,005 \cdot 10^4; \Omega_0 = 3 \cdot 10^4$$

Như vậy, thuật toán Kalman nhận được cho phép tính toán xây dựng sơ đồ hiệu quả bù khử nhiễu có dải thông tần hẹp. Trong chương 3, chúng tôi đã áp dụng lý thuyết và phương pháp tính toán của bộ lọc Kalman để xây dựng một máy thu tín hiệu tối ưu hoạt động hiệu quả trên nền tạp âm và nhiễu. Nội dung bao gồm việc thiết kế cấu trúc máy thu, tối ưu hóa hệ thống nhằm giảm thiểu tác động của nhiễu.

III. KẾT LUẬN

Trong bối cảnh hiện nay, việc phát triển các phương pháp tính toán và phân tích tín hiệu trở nên ngày càng quan trọng, đặc biệt là trong lĩnh vực xử lý tín hiệu liên tục. Bộ lọc Kalman đã chứng tỏ được vai trò quan trọng trong việc nâng cao hiệu quả và độ chính xác trong các ứng dụng như điều khiển tự động, hệ thống định vị, và các ứng dụng công nghiệp khác. Do đó, việc nghiên cứu và xây dựng một phương pháp tính toán hiệu quả cho bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục là vô cùng cần thiết. Khi không sử dụng lọc Kalman thì Tín hiệu thu được thường bị ảnh hưởng nặng bởi tạp âm và nhiễu, khiến chất lượng tín hiệu suy giảm đáng kể. Độ chính xác trong ước lượng trạng thái và tái tạo tín hiệu thấp, dẫn đến hiệu suất của hệ thống bị hạn chế trong các điều kiện làm việc phức tạp. Còn khi sử dụng lọc Kalman: Bộ lọc đã loại bỏ đáng kể ảnh hưởng của tạp âm và nhiễu, giúp cải thiện chất lượng tín hiệu thu được. Độ chính xác trong việc ước lượng trạng thái được nâng cao, đồng thời khả năng theo dõi và tái tạo tín hiệu trong các môi trường nhiễu động được cải thiện rõ rệt.

Luận văn này đã đạt được những kết quả quan trọng như sau:

- Xây dựng được phương pháp tính toán bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục, giúp nâng cao hiệu quả xử lý và độ chính xác trong các ứng dụng cụ thể.
- Đề xuất được các cải tiến trong thuật toán bộ lọc Kalman để phù hợp với các loại tín hiệu liên tục có tính chất khác nhau.
- Ứng dụng thành công phương pháp vào một số trường hợp cụ thể, chứng minh tính khả thi và hiệu quả của phương pháp đề xuất.

Tuy nhiên, luận văn vẫn còn một số hạn chế:

- Phạm vi nghiên cứu của luận văn còn hạn chế ở một số ứng dụng cụ thể, chưa bao quát hết các lĩnh vực có thể áp dụng bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục.
- Một số giả định trong mô hình có thể chưa hoàn toàn phản ánh đầy đủ các tình huống thực tế, dẫn đến việc kết quả chưa đạt được độ chính xác cao nhất trong mọi trường hợp.

Dựa trên những kết quả đã đạt được và những hạn chế còn tồn tại, luận văn đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

- Dựa trên những kết quả đã đạt được và những hạn chế còn tồn tại, luận văn đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:
- Mở rộng phạm vi nghiên cứu và ứng dụng của phương pháp tính toán bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục trong các lĩnh vực khác như viễn thông, y tế, và công nghiệp.

- Phát triển các mô hình và thuật toán mới nhằm khắc phục những hạn chế của các giả định ban đầu, tăng cường độ chính xác và độ tin cậy của phương pháp.

DANH MỤC CÁC TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] PGS. TS. Nguyễn Tăng Cường, 2002, *Điều khiển trong không gian trạng thái*, NXB “Quân đội nhân dân”.
- [2] PGS. TS. Nguyễn Tăng Cường, 2000, *Lý thuyết điều khiển tự động T1*, NXB “Học viện kỹ thuật quân sự”.
- [3] PGS. TS. Nguyễn Tăng Cường, 2006, *Điều khiển ngẫu nhiên*, *Giáo trình cao học*, 2006, Học viện kỹ thuật quân sự.
- [4] Simon Haykin, 2001, *Kalman Filtering and Neural Network*, John Wiley & Sons
- [5] Brown, R. G., & Hwang, P. Y. C., 2012, *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with MATLAB Exercises* (4th Edition). Wiley.
- [6] Grewal, M. S., & Andrews, A. P, 2014, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB* (4th Edition). Wiley-IEEE Press.
- [7] Simon, D, 2010), *Kalman Filtering for Beginners with MATLAB Examples*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

PHỤ LỤC

1. Đồ thị sự phụ thuộc thông số β vào γ khi cường độ nhiễu thay đổi

```
% Giá trị của y
y = linspace(0, 10, 1000); % tạo giá trị y từ 0 đến 10 với 1000 điểm

% Giá trị của q
q_values = [1, 5, 10];

% Tạo đồ thị cho từng giá trị của q
figure;
hold on; % giữ đồ thị để vẽ nhiều đường
for i = 1:length(q_values)
    q = q_values(i);
    B_y = (y.^2./(2*q).*(sqrt(1+2*q) - 1).^2 + 1) ./ (1 + y.*(sqrt(1+2*q) - 1));
    plot(y, B_y, 'DisplayName', ['q = ', num2str(q)]);
end

% Đặt tiêu đề và nhãn trục
title('Đồ thị của B(y) với các giá trị khác nhau của q');
xlabel('y');
ylabel('B(y)');
legend show; % hiện thị chú thích

grid on; % thêm lưới vào đồ thị
hold off; % dừng việc giữ đồ thị
```

2. Giá trị chuẩn hoá $k_{11}^*(\gamma)$ và $k_{21}^*(\gamma)$

```
% Tạo dãy giá trị của y với khoảng cách bước nhảy là các lũy thừa của 10
y = logspace(-3, 1, 100); % Từ 10^-3 đến 10^1, tổng cộng 100 điểm

% Tính toán dãy giá trị của x1 dựa trên y và hàm x = sqrt(y*(y+0.5))/(1+y)
x11 = sqrt(y.*(y+0.5))./(1+y);

% Tính toán dãy giá trị của x2 dựa trên y và hàm x = y/(y+1)
x21 = y./(y+1);

% Vẽ đồ thị với scale log cho cả trục x và y
loglog(y, x11, 'b', y, x21, 'r');
grid on; % Bật lưới
```

3. Giá trị chuẩn hoá $k_{22}^*(\gamma)$ và $k_{12}^*(\gamma)$

```
% Tạo dãy giá trị của y với khoảng cách bước nhảy là các lũy thừa của 10
y = logspace(-2, 2, 100); % Từ 10^-2 đến 10^2, tổng cộng 100 điểm
```

```

% Tính toán dãy giá trị của x1 dựa trên y và hàm  $x = 1/(1+y)$ 
x12 = 1./(1 + y);

% Tính toán dãy giá trị của x2 dựa trên y và hàm  $x = \sqrt{y*(y+5)}/(y*(y+1))$ 
x22 = sqrt(y.*(y+0.5))./(y.*(y+1));

% Vẽ đồ thị với scale log cho cả trục x và y
loglog(y, x12, 'b', y, x22, 'r');
grid on; % Bật lưới

```

4. Sự phụ thuộc thời gian của các phần tử $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{33}$

```

% Bật lưới function main()
% Định nghĩa hàm đạo hàm của hệ phương trình vi phân
%  $p(1) = p_{11}, p(2) = p_{12}, p(3) = p_{13}$ 
%  $p(4) = p_{22}, p(5) = p_{23}, p(6) = p_{33}$ 
dydt = @(t, p) [
    2*p(2) - (p(1)^2)/100;
    p(3) + p(4) - (p(1)*p(2))/100;
    p(5) - (p(1)*p(3))/100;
    2*p(5) - (p(2)^2)/100 + 0.1;
    p(6) - (p(2)*p(3))/100;
    -(p(3)^2)/100
];

% Điều kiện ban đầu
p0 = [1000; 0; 0; 50; 0; 0.1];

% Khoảng thời gian để giải (có thể thay đổi)
tspan = [0 1000];

% Giải hệ phương trình vi phân bằng hàm ode45
[t, p] = ode45(dydt, tspan, p0);

% Vẽ đồ thị riêng biệt cho từng biến phụ thuộc
figure;
p111=0.01*p(:, 1);
subplot(3, 2, 1);
plot(t, p111);
title('p11');
grid on;

p221=0.01*p(:, 4);
subplot(3, 2, 2);
plot(t, p221);
title('p22');
grid on;

```

```
subplot(3, 2, 3);
plot(t, p(:, 2));
title('p12');
grid on;
```

```
subplot(3, 2, 4);
plot(t, p(:, 5));
title('p23');
grid on;
```

```
subplot(3, 2, 5);
plot(t, p(:, 3));
title('p13');
grid on;
```

```
subplot(3, 2, 6);
plot(t, p(:, 6));
title('p33');
grid on;
```

5. biểu diễn: a- phổ tín hiệu và nhiễu ở lối vào; b- phổ lối ra kênh lọc tín hiệu; c- đặc tính biên độ tần số theo tín hiệu; d- đặc tính biên độ tần số theo nhiễu;

```
% Khởi tạo các giá trị a, b1, b2
```

```
a = 0.1;
```

```
b1 = 0.089;
```

```
b2 = 0.104;
```

```
% Khởi tạo giá trị w từ 0 đến 1
```

```
w = linspace(0, 1, 1000); % tạo giá trị w từ 0 đến 1 với 1000 điểm
```

```
% Tính toán Abs(H1(iw)) và H2
```

```
numerator = a.^2 + w.^2; % Tử số chung cho Abs(H1(iw)) và H2
```

```
denominator = (a + b2 + b1 * a - w.^2).^2 + (1 + a + b1 + b2)^2 .* w.^2; % Mẫu số chung
```

```
H1 = sqrt(b1.^2 * (numerator ./ denominator)); % Tính H1
```

```
H2 = sqrt(b2.^2 * (1 + w.^2) ./ denominator); % Tính H2
```

```
% Tính toán Sx và Sy
```

```
Sx = 1./(1 + w.^2) + 2.5./(1 + 100 * w.^2) + 1/40;
```

```
Sy = Sx .* H1.^2;
```

```
% Vẽ đồ thị
```

```
figure;
```

```

% Vẽ đồ thị Sx
subplot(2, 2, 1);
plot(w, Sx, 'LineWidth', 1.5);
title('Đồ thị của S_x(w)');
xlabel('w');
ylabel('S_x(w)');
grid on;

```

```

% Vẽ đồ thị H1
subplot(2, 2, 2);
plot(w, H1, 'LineWidth', 1.5);
title('Đồ thị của |H_1(iw)|');
xlabel('w');
ylabel('|H_1(iw)|');
grid on;

```

```

% Vẽ đồ thị Sy
subplot(2, 2, 3);
plot(w, Sy, 'LineWidth', 1.5);
title('Đồ thị của S_y(w)');
xlabel('w');
ylabel('S_y(w)');
grid on;

```

```

% Vẽ đồ thị H2
subplot(2, 2, 4);
plot(w, H2, 'LineWidth', 1.5);
title('Đồ thị của |H_2(iw)|');
xlabel('w');
ylabel('|H_2(iw)|');
grid on;

```

BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐIỆN LỰC



NGÔ VĂN HƯỜNG

**XÂY DỰNG PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN
BỘ LỌC KALMAN TÍN HIỆU LIÊN TỤC**

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT ĐIỆN TỬ

HÀ NỘI, 2024

BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐIỆN LỰC

NGÔ VĂN HƯỜNG

**XÂY DỰNG PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN
BỘ LỌC KALMAN TÍN HIỆU LIÊN TỤC**

Chuyên ngành : Kỹ Thuật Điện Tử
Mã số : 8520203

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT ĐIỆN TỬ

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Nguyễn Tăng Cường

HÀ NỘI, 2024

MỤC LỤC

I. PHẦN MỞ ĐẦU.....	1
1. Lý do chọn đề tài.....	1
2. Mục đích nghiên cứu	1
3. Nhiệm vụ nghiên cứu:.....	1
4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu	1
5. Phương pháp nghiên cứu	2
II. BỐ CỤC CỦA LUẬN VĂN.....	2
CHƯƠNG 1: LỌC KALMAN VÔ HƯỚNG TÍN HIỆU LIÊN TỤC.....	3
1.1. Đặt vấn đề	3
1.2. Phương trình Lọc Kalman (KF).....	4
1.3. Hệ số khuếch đại lọc Kalman.....	5
1.4. Tính toán Lọc Kalman vô hướng	6
1.4.1. Trường hợp ứng dụng 1	6
1.4.2. Trường hợp ứng dụng 2	7
1.4.3. Trường hợp ứng dụng 3	8
1.4.4. Trường hợp ứng dụng 4	9
CHƯƠNG 2: LỌC KALMAN LIÊN TỤC NHIỀU CHIỀU (DẠNG MA TRẬN).....	14
2.1. Phương trình Lọc Kalman nhiều chiều	14
2.2. Tính toán lọc Kalman nhiều chiều	15
2.2.1. Trường hợp ứng dụng 1	15
2.2.2. Trường hợp ứng dụng 2	19
2.2.3. Trường hợp ứng dụng 3	20
2.2.4. Trường hợp ứng dụng 4	20
2.2.5. Trường hợp ứng dụng 5	22
CHƯƠNG 3: ÁP DỤNG LỌC KALMAN XÂY DỰNG MÁY THU TỐI ƯU TRÊN NỀN TẬP ÂM VÀ NHIỀU	26
3.1. Xây dựng cấu trúc máy thu tối ưu:	26
3.2. Xây dựng hệ tối ưu có tính đến bù khử nhiễu phổ hẹp vùng tần số cao....	30
III. KẾT LUẬN	36

I. PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong bối cảnh hiện nay, các hệ thống kỹ thuật hiện đại ngày càng yêu cầu cao về khả năng xử lý tín hiệu chính xác trong môi trường có nhiễu nhiều và tạp âm. Việc tối ưu hóa hiệu suất của các hệ thống này đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực, từ truyền thông, radar, định vị đến điều khiển tự động và y sinh học.

Bộ lọc Kalman, với khả năng dự báo và ước lượng chính xác trạng thái của hệ thống từ các quan sát bị nhiễu, đã trở thành một công cụ quan trọng trong lý thuyết và ứng dụng xử lý tín hiệu. Đặc biệt, lọc Kalman tín hiệu liên tục là một hướng tiếp cận phù hợp để giải quyết các bài toán xử lý tín hiệu trong thời gian thực, giúp cải thiện hiệu quả của các hệ thống hoạt động trong môi trường động.

Tuy nhiên, việc tính toán và áp dụng bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục vẫn đối mặt với nhiều thách thức. Ở Việt Nam, tuy có nhiều tài liệu giáo trình giảng dạy đại học, sau đại học liên quan sâu đến lý thuyết và ứng dụng của bộ lọc Wiener và Kalman, nhưng đáng tiếc, chủ yếu bằng tiếng nước ngoài. Với mong muốn đóng góp vào việc phát triển lý thuyết và nâng cao khả năng ứng dụng của bộ lọc Kalman, đề tài “Xây dựng phương pháp tính toán bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục” được lựa chọn. Đề tài này không chỉ tập trung vào việc xây dựng phương pháp tính toán hiệu quả cho bộ lọc Kalman trong các hệ thống vô hướng và đa chiều, mà còn hướng tới áp dụng thực tiễn trong việc xây dựng máy thu tín hiệu tối ưu trên nền tạp âm và nhiễu.

Nghiên cứu này kỳ vọng sẽ mang lại các kết quả thiết thực, góp phần phát triển các giải pháp xử lý tín hiệu hiệu quả hơn, đồng thời mở ra hướng đi mới trong việc ứng dụng lý thuyết lọc Kalman vào các lĩnh vực khoa học và công nghệ.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục tiêu nghiên cứu tổng quát: Nắm vững nền tảng khoa học lý thuyết lọc Kalman để xây dựng phương pháp áp dụng trong lĩnh vực kỹ thuật vô tuyến, điện tử, điều khiển.

Mục tiêu nghiên cứu cụ thể: Xây dựng phương pháp tính toán bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục và áp dụng tổng hợp thuật toán máy thu tối ưu.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu:

Hiểu và nắm được lý thuyết lọc Kalman tín hiệu ngẫu nhiên liên tục.

Tổng hợp thuật toán máy thu tối ưu sử dụng công cụ lọc Kalman.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Lý thuyết lọc tối ưu tuyến tính – Kalman và cấu trúc máy thu tín hiệu vô tuyến dưới tác động của nhiễu.

Thời gian nghiên cứu: Từ năm 2023 – 2024

5. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu lý thuyết lọc Kalman và nghiên cứu ứng dụng trong kỹ thuật vô tuyến điện tử với Mô phỏng Matlab

II. BỐ CỤC CỦA LUẬN VĂN

Luận văn bao gồm: Phần mở đầu, kết luận, phụ lục, danh mục tài liệu tham khảo, và nội dung của đề tài có 03 chương sau:

Phần mở đầu

Chương 1: Lọc Kalman vô hướng tín hiệu liên tục

Chương 2: Lọc Kalman liên tục nhiều chiều (dạng ma trận)

Chương 3: Áp dụng lọc Kalman xây dựng máy thu tối ưu trên nền tạp âm và nhiễu

Phần kết luận

CHƯƠNG 1: LỌC KALMAN VÔ HƯỚNG TÍN HIỆU LIÊN TỤC

1.1. Đặt vấn đề

Xét tổ hợp tín hiệu cộng tính (gồm tín hiệu $s(t, \lambda)$ cộng với tạp trắng kênh đo lường $n(t)$ - nhiễu) tác động lên lối vào – kênh quan sát của bộ lọc tuyến tính

$$x(t) = s(t, \lambda) + n(t); \quad s(t, \lambda) = c(t)\lambda(t). \quad (1.1)$$

Biểu thức này được gọi là phương trình kênh quan sát (kênh đo lường).

Ở đây $\lambda(t)$ là quá trình ngẫu nhiên (QTNN) mang thông tin hữu ích và được tạo ra bằng cách truyền tín hiệu tạp trắng tạo hình $v(t)$ qua bộ lọc tạo hình (LTH) được mô tả bởi phương trình vi phân ngẫu nhiên (PTVPNN) có dạng

$$\frac{d\lambda}{dt} = a(t)\lambda(t) + v(t); \quad \lambda(0) = \lambda_0 \quad (1.2)$$

Trong các phương trình này, $a(t)$ và $v(t)$ là các hàm số phụ thuộc vào thời gian, suy ra bộ lọc Kalman (KF) trong trường hợp tổng quát sẽ là một hệ thống tuyến tính không dừng.

Giả sử rằng các QTNN $\lambda(t)$, $v(t)$, $n(t)$ là QTNN trung tâm (có kỳ vọng $E(\cdot)$ bằng 0) và độc lập lẫn nhau:

$$\begin{aligned} E(\lambda_t) &= E(v_t) = E(n_t) = 0; \\ E(\lambda_t n_\tau) &= E(n_t v_\tau) = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

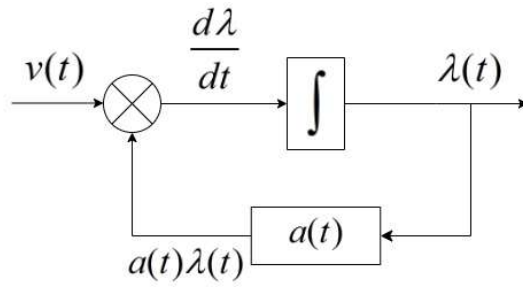
Theo định nghĩa, các tạp trắng $v(t)$ - kênh bộ lọc tạo hình tín hiệu hữu ích và tạp trắng $n(t)$ - nhiễu kênh đo lường đều có hàm tương quan dạng xung Dirac (hàm Delta

$$\begin{aligned} \delta(t): \\ R_n(t, \tau) &= E(n_t n_\tau) = S_0(t) \delta(t - \tau); \\ R_v(t, \tau) &= E(v_t v_\tau) = q_v(t) \delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (1.4)$$

và hiển nhiên do tính độc lập của chúng, nên các hàm tương quan chéo:

$$E(n_t x_\tau) = 0; \quad E(v_t x_\tau) = 0. \quad (1.5)$$

Từ phương trình (1.2) ta có sơ đồ cấu trúc (Hình 1-1)



Hình 1-1: Sơ đồ cấu trúc bộ lọc tạo hình tín hiệu hữu ích $\lambda(t)$

Nhiệm vụ đặt ra là cần tổng hợp bộ lọc tuyến tính tối ưu (lọc Kalman) đưa ra ước lượng tối ưu $\hat{\lambda}(t)$ cho quá trình $\lambda(t)$ (1.2) thông qua tín hiệu kênh đo lường (quan sát) $x(t)$ (1.1)

$$\hat{\lambda}(t) = \int_0^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (1.6)$$

Trong đó: $h(t, \tau)$ - hàm trọng lượng xung (đặc tính xung – là tín hiệu lỗi ra của hệ tuyến tính khi tác động lỗi vào là hàm xung Dirac) của bộ lọc tuyến tính.

1.2. Phương trình Lọc Kalman (KF)

Chỉ tiêu tối ưu được đặt ra để tổng hợp bộ lọc Kalman là giá trị cực tiểu (minimum) của sai số quân phương σ_e^2 (trung bình xác suất $E\{\cdot\}$ của bình phương sai số $e(t)$ giữa giá trị thật $\lambda(t)$ và ước lượng của nó $\hat{\lambda}(t)$; σ_e^2 còn được gọi là phương sai)

$$\sigma_e^2 = E \left\{ \left[\lambda(t) - \hat{\lambda}(t) \right]^2 \right\}; \quad e(t) = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t).$$

Khi đó, theo nguyên lý trực giao của hàm trọng lượng xung, bộ lọc Kalman phải thỏa mãn phương trình tích phân Winer – Hopf sau

$$R_{\lambda x}(t, \alpha) = \int_0^t h(t, \tau) R_x(\tau, \alpha) d\tau, \quad 0 < \alpha < t, \quad (1.7)$$

Trong đó:

$R_{\lambda x}(t, \alpha) = E(\lambda_t x_\alpha)$ - hàm tương quan chéo của tín hiệu hữu ích $\lambda(t)$ và tín hiệu kênh quan sát $x(t)$;

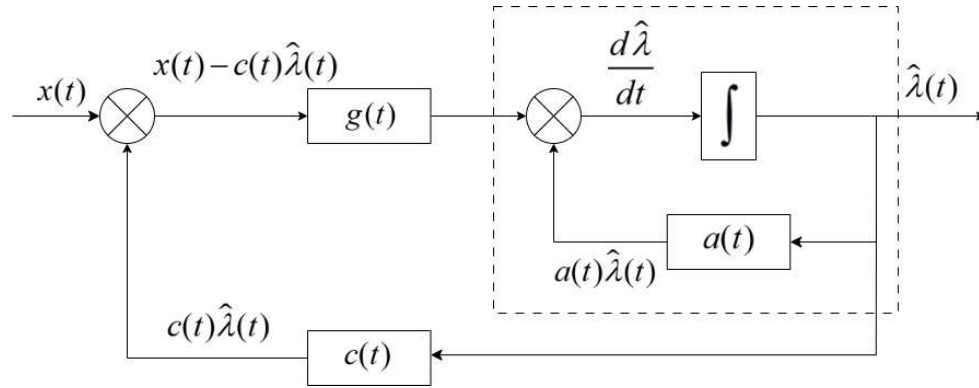
$R_x(\tau, \alpha) = E(x_\tau x_\alpha)$ - hàm tự tương quan của tín hiệu kênh quan sát $x(t)$

Để tìm cấu trúc bộ lọc Kalman (tìm thuật toán tính ước lượng tối ưu $\hat{\lambda}(t)$), cần triển khai phép tính lấy đạo hàm biểu thức vế trái và biểu thức vế phải (theo thời gian t) của phương trình Winer – Hopf (1.7). Sau các phép biến đổi toán học, ta nhận được PTVP cho ước lượng tối ưu $\hat{\lambda}(t)$ - dạng PTVP của bộ lọc Kalman

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = a(t)\hat{\lambda}(t) + g(t)[x(t) - c(t)\hat{\lambda}(t)], \quad \hat{\lambda}(0) = \lambda_0, \quad (1.9)$$

Trong đó $g(t) = h(t, t)$ - Hệ số khuếch đại của bộ lọc Kalman.

Từ PTVP mô tả lọc Kalman, nhận được sơ đồ cấu trúc lọc Kalman sau



Hình 1-2: Sơ đồ cấu trúc lọc Kalman

Nhận xét: PTVP lọc Kalman xác định ước lượng tối ưu $\hat{\lambda}(t)$ (1.9) chưa được khép kín do hệ số khuếch đại $g(t)$ là hàm chưa được xác định.

1.3. Hệ số khuếch đại lọc Kalman

Mục 1.3. có nhiệm vụ xác định hệ số khuếch đại $g(t)$ trong bộ lọc Kalman

Theo nguyên tắc trực giao (sai số $e(t)$ trực giao với lượng vào $x(\alpha)$ của bộ lọc)

$$E[e(t)x(\alpha)] = 0,$$

Khi đó:

$$E(e_t x_\alpha) = E[(\lambda_t - \hat{\lambda}_t)x_\alpha] = E(\lambda_t x_\alpha) - E(\hat{\lambda}_t x_\alpha) = 0.$$

Suy ra, có được biểu thức sau

$$E[\lambda(t)x(t)] = E[\hat{\lambda}(t)x(t)].$$

Thay thế phương trình quan sát ở vế trái, biểu thức ước lượng $\hat{\lambda}(t)$ (ở dạng tích phân) và sau một số biến đổi toán học, nhận được hàm trọng lượng xung của bộ lọc Kalman (hệ số khuếch đại) $g(t) = h(t, t)$

$$g(t) = D(t)c(t) / S_0(t). \quad (1.10)$$

Thành phần phương sai $D(t) = \sigma_e^2$ của sai số bộ lọc $e(t) = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t)$ sẽ được tính theo PTVP của phương sai của sai số

$$\frac{dD}{dt} = 2a(t)D - c^2(t)\frac{D^2}{S_0(t)} + q_v(t). \quad (1.13)$$

PTVP (1.13) là PTVP thường phi tuyến mang tên Riccati, về tổng quát được giải theo phương pháp tích phân số. Nghiệm $D(t)$ của (1.13) cho phép tính hệ số khuếch đại $g(t)$ và như vậy xác định đầy đủ cấu trúc bộ lọc Kalman (1.9).

Nhận xét. Nếu PTVP của bộ LTH có dạng

$$\frac{d\lambda}{dt} = a(t)\lambda(t) + b(t)v(t), \quad (1.14)$$

thì PTVP của phương sai (1.13) sẽ có mô tả

$$\frac{dD}{dt} = 2a(t)D - c^2(t)\frac{D^2}{S_0(t)} + b^2(t)q_v(t). \quad (1.15)$$

1.4. Tính toán Lọc Kalman vô hướng

Quy trình tính toán bộ lọc Kalman sẽ được xây dựng theo các dạng ứng dụng cụ thể để qua thực hành này có thể hiểu ý nghĩa và xác định từng thành phần có trong lọc Kalman.

1.4.1. Trường hợp ứng dụng 1

Giả sử biết hàm tương quan tín hiệu hữu ích $\lambda(t)$ là $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 e^{-\alpha|\tau|}$. Trước tiên, cần tìm hệ số $\alpha(t)$ của lọc tạo hình (1.2).

Các bước tính toán. Từ dạng hàm tương quan, suy ra LTH là hệ dừng; tập tạo hình $v(t)$ - là tập trắng ngẫu nhiên dừng; $q_v = \text{const}$. Khi đó, tìm hàm truyền đạt LTH từ biểu thức $S_\lambda = S_v(\omega)H(s)H(-s) = q_v |H(s)|^2$, ($H(s)$ là hàm truyền đạt của LTH, $S_v(\omega) = q_v$ là cường độ phổ của tín hiệu tập trắng tạo hình $v(t)$).

Biết biến đổi thuận Fourier của hàm $e^{-\alpha|\tau|}$

$$\mathfrak{F}[e^{-\alpha|\tau|}] = 2\alpha / (\alpha^2 + \omega^2)$$

Nên phổ tín hiệu $\lambda(t)$

$$S_\lambda(\omega) = 2\sigma_\lambda^2 \alpha / (\alpha^2 + \omega^2)$$

Biểu diễn $S_\lambda(\omega)$ dưới dạng tích

$$S_\lambda(\omega) = 2\sigma_\lambda^2 \alpha / [(\alpha - i\omega)(\alpha + i\omega)] = 2\sigma_\lambda^2 \alpha / [(\alpha - s)(\alpha + s)]$$

Nếu đặt $H(s) = 1 / (\alpha + s)$, thì thay ký hiệu s bằng $p = d/dt$, và vận dụng biểu thức: $\left(\alpha + \frac{d}{dt}\right)\lambda = v(t)$

Nhận được PTVP của LTH

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\alpha\lambda + v(t). \quad (1.16)$$

Như vậy, $a = -\alpha = \text{const}$; $q_v = 2\alpha\sigma_\lambda^2$.

Thông số α có ý nghĩa vật lý là độ rộng phổ hiệu dụng năng lượng $\Delta_{\omega\lambda}$ khi truyền tin λ , như vậy các thành phần hệ số truyền LTH, mật độ phổ q_v của tạp tạo hình $v(t)$ được xác định bằng cách tính phương sai thông tin truyền σ_λ^2 và hệ số α .

1.4.2. Trường hợp ứng dụng 2

Giải phương trình Riccati (1.13), nếu giả định $dD/dt = 0$ (trường hợp Lọc Kalman dừng); cần tìm các thông số lọc Kalman và hàm truyền đạt có tính đến các kết quả mục ứng dụng 1.4.1.

Các bước tính toán.

Khi $dD/dt = 0$, phương trình Riccati bị suy biến thành phương trình đại số sau (trường hợp $a = -\alpha$)

$$c^2 D^2 + 2\alpha S_0 D - S_0 q_v = 0.$$

Giả sử $c = 1$, ta có

$$D = -\alpha S_0 + \sqrt{\alpha^2 S_0^2 + S_0 q_v} = \alpha S_0 (\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1),$$

Trong đó: $\Lambda_1 = q_v / \alpha^2 S_0$.

Lúc này, từ biểu thức của hệ số khuếch đại (1.10), hệ dùng có $g(t) = g$ dạng

$$g = \frac{D}{S_0} = \alpha (\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1).$$

Theo ứng dụng 1.4.1., $q_v = 2\alpha\sigma_\lambda^2$; $a = -\alpha$, nên

$$\Lambda_1 = q_v / \alpha^2 S_0 = q_v / a^2 S_0 = 2\sigma_\lambda^2 / \alpha S_0.$$

Viết PTVP ước lượng (1.9) dưới dạng

$$\left[d/dt + (g + \alpha) \right] \hat{\lambda} = gx., \text{ hay thay } d/dt = s \text{ ta có } [s + (g + \alpha)] \hat{\lambda} = gx.$$

Từ đây, hàm truyền đạt của Lọc Kalman là tỷ số ảnh $\hat{\lambda} / x$ là

$$H(s) = \frac{\hat{\lambda}}{x} = \frac{g}{s + (g + a)} = \frac{k_0}{1 + sT},$$

Trong đó: $k_0 = g / (g + \alpha)$; $T = 1 / (g + \alpha)$.

Như vậy, lọc Kalman dùng tương đương với mạch điện (khâu quán tính) có hằng số thời gian T , được mắc nối tiếp với bộ khuếch đại có hệ số khuếch đại k_0 .

Thay biểu thức k_0 và T , tính được $g + \alpha = \alpha\sqrt{1 + \Lambda_1}$. Khi đó

$$k_0 = (\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1) / \sqrt{1 + \Lambda_1}$$

(so sánh các thông số này với các thông số lọc Winer, ta tìm được $2\sigma_\lambda^2 = D_s / S_0$ và $\Lambda_1 = \Lambda = D_s / S_0$).

Như dự kiến cho hệ dùng, các hàm truyền đạt của lọc Kalman và lọc Winer là trùng nhau. Khác biệt chỉ ở chỗ, lọc Kalman có cấu trúc được thực hiện ở dạng hệ với phản hồi và như thế sẽ dễ dàng hơn trong mô hình thuật toán hóa trên máy tính số.

1.4.3. Trường hợp ứng dụng 3.

Xét trường hợp hỗn hợp của tín hiệu và tạp nhiễu: $x(t) = \lambda(t)\sin\omega_0 t + n(t)$,

Mô hình thông tin xác định theo PTVP lọc tạo hình

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\alpha\lambda + v(t).$$

Hãy tìm sơ đồ Lọc Kalman.

Các bước tính toán. Khi so sánh kênh quan sát (1.1) và thông tin hữu ích (1.2), có thể thấy

$$c(t) = \sin\omega_0 t; \quad a(t) = -\alpha = \text{const}; \quad q_v(t) = q_v = \text{const}; \quad S_0(t) = S_0 = \text{const}.$$

Từ phương trình xác định ước lượng (1.9), thay thế $g(t) = c(t)D / S_0 = (D / S_0)\sin\omega_0 t$, nhận được tích:

$$g(t)c(t)\hat{\lambda}(t) = (D / S_0)\hat{\lambda}(t)\sin^2 \omega_0 t$$

Sau các biến đổi toán học nhận được dạng PTVP gần đúng xác định ước lượng cận tối ưu của lọc Kalman (với điều kiện thỏa mãn $\tau_k = 1 / \alpha \gg \tau = 2\pi / \omega_0$)

Phương trình phương sai gần đúng

$$\frac{dD}{dt} = -2\alpha D + q_v - \frac{D^2}{2S_0}, \quad (1.17)$$

PTVP lọc gần đúng Kalman có dạng:

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} + \left(\alpha + \frac{D}{2S_0} \right) \hat{\lambda} = \frac{D}{S_0} x(t) \sin \omega_0 t$$

Từ đó

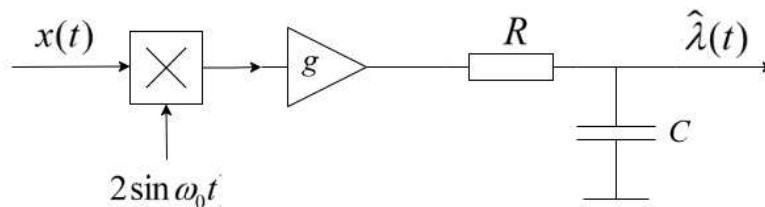
$$\hat{\lambda} = \left(\frac{D}{S_0} x(t) \sin \omega_0 t \right) / \left(d/dt + \left(\alpha + \frac{D}{2S_0} \right) \right) = x(t) 2 \sin \omega_0 t g / (1 + T d/dt)$$

Chuyển PTVP trên về dạng toán tử Laplace (để có hàm truyền đạt), thay $d/dt = s$

$$\hat{\lambda} = x(t)(2 \sin \omega_0 t) g / (1 + Ts)$$

Trong đó: $g = D / 2S_0$ - hệ số khuếch đại; $T = 1 / \alpha_\phi$ - hằng số thời gian; $\alpha_\phi = \alpha + D / 2S_0$.

Dễ thấy, ở đây lọc Kalman thực hiện xử lý: cho tín hiệu quan sát $x(t)$ qua khâu nhân với $2 \sin \omega_0 t$, khâu khuếch đại g và mạch quán tính – bộ lọc thấp tần $1 / (1 + Ts)$, để có ước lượng $\hat{\lambda}$, xem sơ đồ cấu trúc Hình 1-3



Hình 1-3: Sơ đồ nguyên lý lọc Kalman

1.4.4. Trường hợp ứng dụng 4.

Xét PTVP thông tin và PTVP kênh quan sát dạng

$$\frac{d\lambda}{dt} = f\lambda(t) + gv(t); \quad x(t) = h\lambda(t) = n(t)$$

Trong đó: f, g, h – các đại lượng tiền định vô hướng; $\lambda_0(t)$ – đại lượng ngẫu nhiên có trung bình xác suất $E[\lambda_0(t)] = \bar{\lambda}_0$ với phương sai $D_0 = \Lambda$; $n(t), v(t)$ – các tạp trắng dừng không tương quan có kỳ vọng bằng 0 và phương sai $R_n(\tau) = r\delta(\tau)$, $R_v(\tau) = q\delta(\tau)$; $r, q = \text{const}$. Đại lượng $\lambda_0(t)$ không tương quan với $n(t), v(t)$.

Hãy tìm PTVP lọc Kalman, PTVP phương sai của sai số và giải PTVP Riccati.

Các bước tính toán.

Đặt $a(t) = f$; $c(t) = h$; $S_0 = r$; $q_v = q$; $b = q$; $D(t) = p(t)$; $g(t) = k(t)$ (hệ số khuếch đại), theo các kết quả ở trên, nhận được thuật toán lọc Kalman, bao gồm:

- Thuật toán tính ước lượng tối ưu Kalman

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = f\hat{\lambda} + k(t)[x(t) - h\hat{\lambda}(t)], \quad \lambda(t_0) = \bar{\lambda}; \quad k(t) = \frac{hp(t)}{r}; \quad (1.18a)$$

- Thuật toán tính phương sai của sai số lọc Kalman từ PTVP Riccati

$$\frac{dp}{dt} = 2fp(t) - \frac{h^2}{r}p^2(t) + g^2q; \quad p(t_0) = \sigma_0^2. \quad (1.18b)$$

$$p = D$$

Sau một số biến đổi toán học, tìm được nghiệm PTVP Riccati

$$p(t) = \frac{\rho_1 - \rho_2 C_0 e^{-2\mu(t-t_0)}}{1 - C_0 e^{-2\mu(t-t_0)}}; \quad t \geq 0; \quad (1.19)$$

$$C_0 = \frac{p(t_0) - \rho_1}{p(t_0) - \rho_2} = \frac{\sigma_0^2 - \rho_1}{\sigma_0^2 - \rho_2}.$$

Ở trạng thái thiết lập (hệ dừng, khi $t \rightarrow \infty$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_\infty = \rho_1 = \frac{r}{h^2}f + \sqrt{\frac{r^2}{h^4}f^2 + \frac{r}{h^2}g^2q}$$

Như vậy giá trị thiết lập của phương sai không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu $p(t_0) = \sigma_0^2$. Đặt $f = -\alpha$; $\alpha > 0$, ta có giá trị xác lập

$$p_\infty = \frac{\alpha r}{h^2}(\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1), \quad (1.20)$$

Trong đó: $\Lambda_1 = g^2qh^2 / r\alpha^2$.

Theo PTVP của phương sai, nhận được [xem (1.11)]

$$\frac{dD_\lambda}{dt} = 2fD_\lambda + g^2q.$$

Từ đó, ở chế độ xác lập ($f = -\alpha$), ta có

$$D_\lambda = g^2q / 2\alpha. \quad (1.21)$$

Theo (1.1), thành phần tín hiệu $s(t) = h\lambda(t)$, do vậy công suất tín hiệu

$$D_s = \sigma_0^2 = h^2 D_\lambda = h^2 q g^2 / 2\alpha, \text{ nên } \Lambda_1 = 2D_s / r\alpha.$$

Độ rộng phổ hiệu dụng một phía của nhiễu bằng $2r$, độ rộng phổ hiệu dụng của thông tin $\lambda = \lambda(t)$ bằng $\alpha / 4$ (Hz), do vậy $\Lambda_1 = D_s / p$, trong đó p - là công suất nhiễu trong dải thông tần hiệu dụng của thông tin. Như vậy, Λ_1 - mức cường độ phổ nhiễu trong bộ lọc Kalman. Từ (1.20) có tính đến đẳng thức $\alpha r / h^2 = 2D_\lambda / \Lambda_1$, nhận được

$$p_\infty = (2D_\lambda / \Lambda_1)(\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1)$$

Khi $\Lambda_1 \rightarrow 0$, thì $p_\infty \rightarrow D_\lambda$; khi $\Lambda_1 \rightarrow \infty$, thì $p_\infty \rightarrow 0$.

Tìm hàm truyền đạt của lọc Kalman. Từ PTVP lọc Kalman, ta có

$$H_{\hat{\lambda}}(s) = \frac{k}{s + (\alpha + hk)} = \frac{k_0}{1 + sT_0}, \quad (1.22)$$

Trong đó: $k_0 = \frac{k}{\alpha + hk}$; $T_0 = \frac{1}{\alpha + hk}$, lưu ý $\alpha + hk = \alpha + \frac{h^2}{r} p_\infty = \alpha \sqrt{1 + \Lambda_1}$

$$\text{Khi đó } k_0 = \frac{k}{\alpha \sqrt{1 + \Lambda_1}} = \frac{p_\infty h / r}{\alpha \sqrt{1 + \Lambda_1}} = \frac{\frac{\alpha r}{h^2} (\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1) \frac{h}{r}}{\alpha \sqrt{1 + \Lambda_1}} = \frac{\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1}{h \sqrt{1 + \Lambda_1}}$$

Như vậy, hàm truyền đạt lọc Kalman theo tín hiệu

$$H_s(s) = hH_{\hat{\lambda}}(s) = \frac{hK_0}{1 + sT_0} = \frac{K_1}{1 + sT_0}; \quad T_0 = \frac{1}{\alpha \sqrt{1 + \Lambda_1}};$$

$$\lim_{\Lambda_1 \rightarrow \infty} T_0 = 0; \quad \lim_{\Lambda_1 \rightarrow \infty} T_0 = 1 / \alpha; \quad \lim_{\Lambda_1 \rightarrow \infty} K_1 = 1; \quad \lim_{\Lambda_1 \rightarrow 0} K_1 = 0.$$

Về độ nhạy của bộ lọc

Để bước đầu hiểu được cách tính độ nhạy của bộ lọc, ta xét một ví dụ đơn giản, khi phương trình tiền định của thông tin có dạng (1.1), (1.2) với $c = 1$; $a = -\alpha$.

Ta giả định, hệ số khuếch đại k là hằng số. Theo (1.10), tính được phương sai của ước lượng ở chế độ dừng

$$D = \frac{k^2 S_0 + q_v}{2(\alpha + k)}. \quad (1.23)$$

Từ (1.24) có thể chỉ ra các giới hạn được phép khi thay đổi k . Dễ thấy, giá trị cực tiểu của phương sai nhận được từ điều kiện $dD/dk = 0$, suy ra giá trị hệ số khuếch đại đạt cực tiểu sai số $k_m = \alpha \left(\sqrt{1 + \frac{q_v}{\alpha^2 S_0}} - 1 \right) = \alpha(\sqrt{1 + 2q} - 1)$, (1.24)

Trong đó: $q = \frac{D_c}{\alpha S_0}$; $D_c = \frac{q_v}{2\alpha}$ - phương sai của ước lượng tin hữu ích; q - tỉ số tín/ tạp.

Biến đổi (1.24)

$$D = \frac{q_v}{2\alpha} \frac{\frac{k^2 S_0}{q_v} + 1}{1 + k/\alpha} = D_c \frac{\gamma^2 \frac{S_0}{q_v} k_m^2 + 1}{1 + \gamma k_m/\alpha},$$

Trong đó: $\gamma = k/k_m$. Đặt hàm độ nhảy $\beta(\gamma) = \frac{D}{D_c}$ để xem xét chất lượng lọc khi cường độ nhiễu thay đổi thay đổi

$$\beta(\gamma) = \frac{D}{D_c} = \frac{\gamma^2 \frac{1}{2q} (\sqrt{1 + 2q} - 1)^2 + 1}{1 + \gamma(\sqrt{1 + 2q} - 1)}$$

Như vậy, khi $\gamma = 0, \beta = 1$. Cần tìm giá trị β khi $\gamma = 1$

$$\begin{aligned} \beta(1) &= \frac{\frac{1}{2q} (\sqrt{1 + 2q} - 1)^2 + 1}{\sqrt{1 + 2q}} = \frac{\frac{1 + 2q}{1} - \frac{1}{q} \sqrt{1 + 2q}}{\sqrt{1 + 2q}} = \\ &= \frac{1}{q} \frac{\sqrt{1 + 2q} (\sqrt{1 + 2q} - 1)}{\sqrt{1 + 2q}} = \frac{1}{q} (\sqrt{1 + 2q} - 1) = \frac{1}{\alpha q} k_m. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Trường hợp tỷ lệ tín trên tạp nhỏ ($q \ll 1$)

$$\beta(1) \approx 1 - q/2;$$

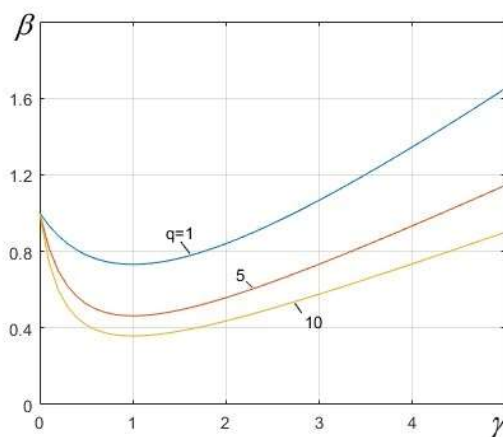
Trường hợp tỷ lệ tín trên tạp lớn

$$\beta(1) \approx \sqrt{2/q}.$$

Theo (1.25)

$$D(k_m) = D = \left(\frac{D_c}{\alpha q} \right) k_m = S_0 k_m.$$

Do đó, như dự kiến $k_m = \frac{D}{S_0}$, biểu thức này trùng với (1.10). Mối phụ thuộc $\beta = \beta(\gamma)$ được thể hiện trên Hình 1-4 với $q = 1; 5; 10$



Hình 1-4: Đồ thị sự phụ thuộc thông số β vào γ khi cường độ nhiễu thay đổi

KẾT THÚC TÓM TẮT CHƯƠNG 1

CHƯƠNG 2: LỘC KALMAN LIÊN TỤC NHIỀU CHIỀU (DẠNG MA TRẬN)

2.1. Phương trình Lọc Kalman nhiều chiều

Xét các phương trình mô tả mô hình thông tin (hữu ích) $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$

$$\frac{d\lambda}{dt} = F(t)\lambda(t) + G(t)w(t); \quad (2.1)$$

và mô hình kênh quan sát $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$

$$x(t) = H(t)\lambda(t) + v(t), \quad (2.2)$$

Trong đó: $w(t)$ - tập trắng $(r \times 1)$ chiều tạo hình tín hiệu hữu ích; $F(t)$ - ma trận lọc tạo hình kích cỡ $(n \times n)$; $G(t)$ - ma trận đầu vào $(n \times r)$ chiều; $H(t)$ - ma trận quan sát $(n \times m)$ - chiều; $v(t)$ - nhiễu tập trắng kênh quan sát.

Giả sử cũng đúng các biểu thức:

$$\begin{aligned} E(w_t) &= 0; & E(w_t w_\tau^T) &= Q(t)\delta(t - \tau); \\ E(v_t) &= 0; & E(v_t v_\tau^T) &= S_0(t)\delta(t - \tau), \end{aligned} \quad (2.3)$$

Trong đó: $\delta(t - \tau)$ - hàm delta δ ; $Q(t)$ và $S_0(t)$ - các ma trận xác định dương đối xứng $(r \times r)$ và $(m \times m)$ với ý nghĩa vật lý $Q(t)$ - là ma trận cường độ phổ của tập trắng tạo hình $w(t)$, $S_0(t)$ - là ma trận cường độ phổ của nhiễu tập trắng kênh quan sát.

Các tập trắng w_t , v_t là không tương quan với nhau, nên thỏa mãn:

$$R_{wv}(t, \tau) = E(w_t v_\tau^T) = 0.$$

và do đó w_t , v_t cũng không tương quan với điều kiện ban đầu tín hiệu hữu ích ngẫu nhiên $\lambda(0) = \lambda_0$; ($E(\lambda_0) = 0$),

$$E(\lambda_0 w_t^T) = 0; \quad E(\lambda_0 v_t^T) = 0,$$

$$\text{ngoài ra: } E(w_t x_\alpha^T) = 0; \quad E(v_t x_\alpha^T) = 0, \quad (2.4)$$

Các quá trình ngẫu nhiên $\lambda(t)$, $v(t)$ cũng không tương quan, nên $E(v_t x_\alpha^T) = 0$,

Cần tìm bộ lọc tối ưu Kalman nhiều chiều cho phép tạo ước lượng không lệch cho tín hiệu hữu ích với tối thiểu hóa bình phương sai số $e_t = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t)$.

Quy trình xây dựng bộ lọc Kalman dạng ma trận – véc tơ cũng tương tự như trường hợp vô hướng

$$\Phi_{\lambda x}(t, \alpha) = \int_0^t K(t, \tau) \Phi_x(\tau, \lambda) d\tau, \quad t > \tau, \alpha > 0 \quad (2.5)$$

Trong đó: $\Phi_{\lambda x}(t, \alpha) = E[\lambda(t)x^T(\alpha)]$ - ma trận tương quan chéo giữa $\lambda(t)$ và $x(\alpha)$

$\Phi_x(\tau, \alpha) = E[x(\tau)x^T(\alpha)]$ - ma trận tự tương quan của tín hiệu quan sát;
 $K(t, \tau)$ - ma trận trọng số của bộ lọc.

Sau các phép biến đổi toán học, nhận được ma trận hệ số khuếch đại lọc Kalman

$$K(t) = P(t)H^T(t)S_0^{-1}(t). \quad (2.18)$$

PTVP cho ước lượng tối ưu của bộ lọc Kalman

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = F(t)\hat{\lambda}(t) + K(t)[x(t) - H(t)\hat{\lambda}(t)]; \quad \hat{\lambda}(t_0) = \hat{\lambda}_0, \quad (2.19)$$

Trong đó: $K(t) = K(t, t)$ - ma trận hệ số khuếch đại ($K(t, \tau)$ chính là ma trận các hàm trọng lượng của bộ lọc nhiều chiều).

PTVP ma trận phương sai $P = D$ của sai số lọc

$$\frac{dP}{dt} = FP + PF^T - PH^TR^{-1}HP + GQG^T. \quad (2.35)$$

PTVP (2.35) được gọi là PT Riccati dưới dạng ma trận.

Trong chế độ thiết lập dừng $dP/dt = 0$, thì

$$FP + PH^TR^{-1}HP + GQG^T = 0 \quad (2.36)$$

2.2. Tính toán lọc Kalman nhiều chiều

2.2.1. Trường hợp ứng dụng 1.

Yêu cầu xác định đồng thời tọa độ $\lambda_1(t)$ và vận tốc $\lambda_2(t) = d\lambda_1(t)/dt$ của mục tiêu chuyển động. Như vậy, phương trình bộ lọc tạo hình (LTH) tín hiệu hữu ích của hệ có dạng

$$\lambda_2(t) = \frac{d\lambda_1(t)}{dt}; \quad \omega(t) = \frac{d\lambda_2(t)}{dt}$$

($\omega(t) = d\lambda_2(t)/dt$ - là dạng PTVP mô tả QTNW Winer với kỳ vọng xác suất và phương sai là các hàm tuyến tính theo thời gian). Trong đó: $\omega(t)$ - tập trắng

với hàm tương quan $R(t, \tau) = Q\delta(t - \tau)$; $Q = C$ - ma trận hằng số. Phương trình kênh quan sát (đo lường) $x_1(t) = \lambda_1(t) + v_1(t)$; $x_2(t) = \lambda_2(t) + v_2(t)$

Trong đó: $v_1(t)$, $v_2(t)$ - các tạp trắng độc lập là nhiễu gây sai số kênh đo lường, với mật độ phổ có cường độ $S_0(t) = S_0 = C_0$ - ma trận hằng số. Dạng véc tơ ma trận của hệ có thể viết như sau:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I};$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} s_r & 0 \\ 0 & s_v \end{bmatrix}$$

Ma trận hệ số khuếch đại

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0^{-1} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{s_r s_v} \begin{bmatrix} s_v & 0 \\ 0 & s_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}/s_r & d_{12}/s_v \\ d_{21}/s_r & d_{22}/s_v \end{bmatrix},$$

Trong đó: d_{ik} ($i, k = 1, 2$) - các phần tử của ma trận phương sai với $d_{12} = d_{21}$ (do ma trận $\mathbf{D}(t)$ đối xứng). Như vậy

$$k_{11} = \frac{d_{11}}{s_r}; \quad k_{12} = \frac{d_{12}}{s_v}; \quad k_{21} = \frac{d_{12}}{s_r}; \quad k_{22} = \frac{d_{22}}{s_v}. \quad (2.37)$$

Kết quả PTVP của lọc Kalman ở dạng ma trận

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \hat{\lambda}_1 \\ x_2 - \hat{\lambda}_2 \end{bmatrix}$$

Hoặc ở dạng vô hướng

$$\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} = \hat{\lambda}_2 + k_{11}(x_1 - \hat{\lambda}_1) + k_{12}(x_2 - \hat{\lambda}_2)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} = k_{21}(x_1 - \hat{\lambda}_1) + k_{22}(x_2 - \hat{\lambda}_2). \quad (2.38)$$

Cần giải phương trình ma trận phương sai (với điều kiện $d\mathbf{D}/dt = 0$) để tìm ma trận phương sai ở chế độ dừng $\mathbf{FD} + \mathbf{DF}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{DS}_0^{-1}\mathbf{D} = 0$; ở đây

$$\mathbf{FD} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} & d_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} & 0 \\ d_{22} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 2d_{12} & d_{22} \\ d_{22} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2d_{12} & d_{22} \\ d_{22} & q \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{D} &= \frac{1}{s_r s_v} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_v & 0 \\ 0 & s_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s_r s_v} \begin{bmatrix} d_{11}s_v & d_{12}s_r \\ d_{12}s_v & d_{22}s_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s_r s_v} \begin{bmatrix} d_{11}^2 s_v + d_{12}^2 s_r & d_{11}d_{12}s_v + d_{12}d_{22}s_r \\ d_{11}d_{12}s_v + d_{12}d_{22}s_r & d_{12}^2 s_v + d_{22}^2 s_r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kết quả, nhận được các hệ số $d_{ik}, i, k = 1, 2$, ở dạng vô hướng

$$d_{11} = \frac{1}{A} \sqrt{s_r \sqrt{q s_r} B}; \quad d_{12} = \frac{1}{A} \sqrt{q s_r}; \quad d_{22} = \frac{1}{A} \sqrt{q \sqrt{q s_r} B} \quad (2.40)$$

$$A = 1 + \sqrt{q s_r} / s_v; B = 2 + \sqrt{q s_r} / s_v = 1 + A$$

Xét trường hợp riêng khi chỉ đo được vị trí (cự ly) mục tiêu (không đo được tốc độ khi tạp kênh đo tốc độ rất lớn $s_v \rightarrow \infty$), thì hệ các PT xác định các hệ số được đơn giản đi nhiều:

$$\frac{d_{11}^2}{s_r} - 2d_{12} = 0; \quad \frac{d_{12}d_{11}}{s_r} - d_{22} = 0; \quad \frac{d_{12}^2}{s_r} = q.$$

Theo các biểu thức này, nhận được $d_{12}^* = \sqrt{q s_r}$, từ đây $d_{11}^* = \sqrt{2d_{12}s_r} = \sqrt{2s_r \sqrt{q s_r}}$, và $d_{22}^* = d_{12}d_{11} / s_r = \sqrt{2q \sqrt{q s_r}}$. Các kết quả này nhận được khi giải với $A = 1, B = 2$. Lúc này $s_v \rightarrow \infty$, các PT lọc Kalman ($k_{12} = k_{22} = 0$) có dạng $\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} = \hat{\lambda}_2 + k_{11}(x_1 - \hat{\lambda}_1); \quad \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} = k_{21}(x_1 - \hat{\lambda}_1).$ (2.41)

Nếu đặt $\gamma = s_v / \sqrt{q s_r}$ và chuẩn hóa các hệ số d_{ik} ở dạng $\delta_{ik} = d_{ik} / d_{ik}^*$, nhận được

$$\delta_{11} = \frac{\sqrt{\gamma(\gamma + 0,5)}}{1 + \gamma}; \quad \delta_{12} = \frac{\gamma}{1 + \gamma}; \quad \delta_{22} = \frac{\sqrt{\gamma(\gamma + 0,5)}}{1 + \gamma} = \delta_{11} \quad (2.42)$$

Nếu d_{ik} còn phụ thuộc vào ba thông số q, s_r, s_v , thì sau khi chuẩn hóa các hệ số này chỉ còn phụ thuộc vào γ . Tìm hàm ma trận truyền đạt

$$\frac{d\hat{\lambda}_i}{dt} \Rightarrow s\hat{\lambda}_i(s) \Rightarrow s\hat{\lambda}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} \\ \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} = s\mathbf{I} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} = s \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{bmatrix}$$

Phương trình bộ lọc $\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = (\mathbf{F} - \mathbf{KH})\hat{\lambda} + \mathbf{Kx}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{I}.$

Dạng ảnh toán tử Laplace $s\mathbf{I}\hat{\lambda} = (\mathbf{F} - \mathbf{K})\hat{\lambda} + \mathbf{Kx}$, hoặc $(\mathbf{K} - \mathbf{F} + s\mathbf{I})\hat{\lambda} = \mathbf{Kx}.$

Hàm ma trận truyền đạt $\hat{\lambda} = \Phi(s)\mathbf{x}; \quad \Phi(s) = (\mathbf{K} - \mathbf{F} + s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{K};$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} - \mathbf{F} + s\mathbf{I} = \begin{pmatrix} k_{11} + s & k_{12} - 1 \\ k_{21} & k_{22} + s \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= [\mathbf{K} - \mathbf{F} + s\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{K} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_{22} + s & 1 - k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (k_{22} + s)k_{11} + k_{21}(1 - k_{12}) & (k_{22} + s)k_{12} + (1 - k_{12})k_{22} \\ -k_{11}k_{21} + k_{21}(k_{11} + s) & -k_{12}k_{21} + (k_{11} + s)k_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

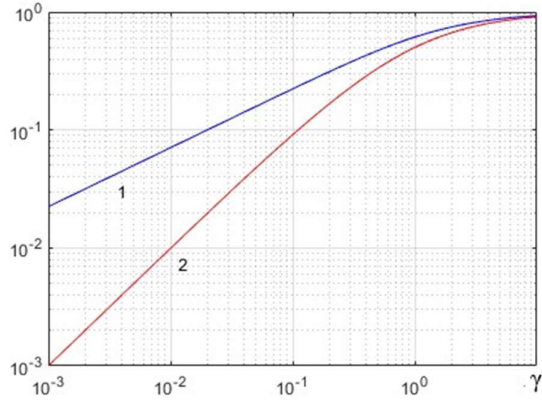
Trước tiên xét định thức $\Delta = s^2 + (k_{11} + k_{22})s + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} + k_{21}.$

Chuẩn hóa các hệ số k_{ik} , $k=1,2$, ở (2.37) cũng như ở (2.42), nhận được kết quả

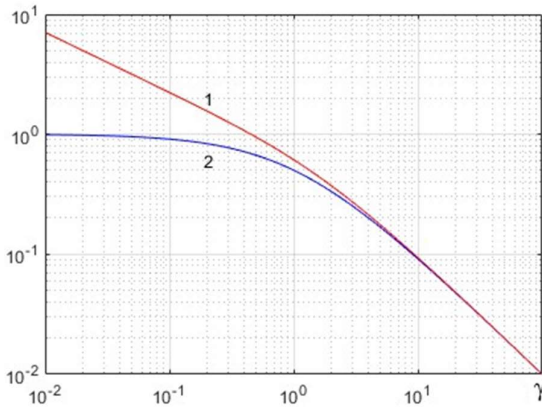
$$k_{11}^* = \frac{k_{11}}{\sqrt{2\sqrt{q/s_r}}} = \frac{1}{1+\gamma} \sqrt{\gamma(\gamma+0,5)}; \quad k_{12}^* = \frac{1}{1+\gamma} = k_{12}.$$

$$k_{21}^* = \frac{k_{21}}{\sqrt{q/s_r}} = \frac{\gamma}{1+\gamma}; \quad \frac{k_{22}}{\sqrt{2\sqrt{q/s_r}}} = \frac{1}{\gamma(1+\gamma)} \sqrt{\gamma(\gamma+0,5)} = k_{22}^*.$$

Trên Hình 2-1 và Hình 2-2 thể hiện các phụ thuộc các giá trị chuẩn hóa vào thông số γ . Ở Hình 2-1 đường cong 1 – quan hệ $k_{11}^*(\gamma)$, $\delta_{11}(\gamma)$, $\delta_{22}(\gamma)$; đường cong 2 – $k_{21}^*(\gamma)$, $\delta_{12}(\gamma)$; ở Hình 2-2 đường cong 1 – $k_{22}^*(\gamma)$, $2 - k_{12}^*(\gamma)$.



Hình 2-1: Giá trị chuẩn hoá $k_{11}^*(\gamma)$ và $k_{21}^*(\gamma)$



Hình 2-2: Giá trị chuẩn hoá $k_{22}^*(\gamma)$ và $k_{12}^*(\gamma)$

2.2.2. Trường hợp ứng dụng 2.

Yêu cầu xác định phương trình ước lượng $\hat{\lambda}$ của véc tơ trạng thái λ , nếu biết phương trình trạng thái của hệ

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \lambda_2; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_2 + w(t); \quad x(t) = \lambda_1(t) + v(t),$$

Trong đó: $w(t), v(t)$ - các tạp trắng độc lập với cường độ phổ $\Psi_w = 1, \Psi_v = 2$.

Thực hiện tính toán. Tìm các phần tử của ma trận phương sai D cần thiết giải phương trình ma trận $\mathbf{F}D + D\mathbf{F}^T + \mathbf{G}Q\mathbf{G}^T - D\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{H}D = 0$.

Kết quả tìm được hệ phương trình cho các phần tử (khi $d_{12} = d_{21}$).

$$2d_{12} - \frac{d_{11}^2}{2} = 0; \quad d_{22} - d_{12} - \frac{d_{11}d_{12}}{2} = 0; \quad 2d_{22} + \frac{d_{12}^2}{2} = 1.$$

Từ đó $d_{11} = 1,1; d_{12} = d_{21} = 0,3025; d_{22} = 0,470$

Véc tơ hệ số khuếch đại

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}\mathbf{H}^T\Psi_v^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1,1 & 0,3025 \\ 0,3025 & 0,470 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,55 \\ 0,151 \end{bmatrix}$$

Phương trình ước lượng lọc Kalman

$$\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} = \hat{\lambda}_2 + 0,55(x - \hat{\lambda}_1); \quad \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} = -\hat{\lambda}_2 + 0,151(x - \hat{\lambda}_1) \quad (2.47)$$

2.2.3. Trường hợp ứng dụng 3

Hãy tìm PTVP của ước lượng véc tơ λ , nếu hệ PTVP trạng thái và quan sát có dạng

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \lambda_2; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = w(t); \quad x(t) = \lambda_1(t) + v(t),$$

Trong đó: $w(t)$, $v(t)$ - các tạp trắng độc lập với cường độ $\psi_w = 1$ và $\psi_v = 0,5$.

Thực hiện tính toán. Đây là trường hợp riêng của ứng dụng 2.2.1, khi không có PT thứ hai trong kênh quan sát (không đo tốc độ), khi đó $s_v \rightarrow \infty$; $s_r = \Psi_v = 0,5$. Phương trình lọc Kalman được suy ra từ phương trình tổng quát khi $s_v \rightarrow \infty$ và có dạng hệ PTVP (2.41). Cần tính tiếp giá trị các hệ số $k_{11}; k_{21}$ khi $q = \Psi_w = 1$

$$\text{Nhu vậy } k_{11} = \sqrt[4]{8}; d_{12} = d_{12}^* = \sqrt{\Psi_w \Psi_v} = \sqrt{2} / 2; \text{ hoặc } k_{21} = k_{12} = \sqrt{2}$$

Phương trình ước lượng của lọc Kalman

$$\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} = \hat{\lambda}_2 + \sqrt[4]{8}(x - \hat{\lambda}_1); \quad \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} = \sqrt{2}(x - \hat{\lambda}_1) \quad (2.49)$$

2.2.4. Trường hợp ứng dụng 4

Cho biết trước phương trình trạng thái (lọc tạo hình) và phương trình kênh quan sát

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\lambda_1 + w(t); \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -2\lambda_2 + 2w(t) \quad (2.50)$$

$$x_1(t) = \lambda_1(t) + v_1(t); \quad x_2(t) = \lambda_2(t) + v_2(t) \quad (2.51)$$

Trong đó: $w(t)$ - tạp trắng; $E(w_t) = 0$; $R_w = \delta(\tau)$; $v_1(t)$ và $v_2(t)$ - các tạp trắng không tương quan với nhau và với $w(t)$; $E[v_1(t)] = E[v_2(t)] = 0$; $R_{v_i}(\tau) = r_i \delta(\tau)$; $r_1 = 0,01$; $r_2 = 0,04$.

Cần tìm bộ lọc Kalman gồm phương trình ước lượng và phương trình Ricatti.
Cần tìm (trong chế độ thiết lập dừng) hàm trọng lượng dạng ma trận của bộ lọc.

Thực hiện tính toán. Viết (2.50) và (2.51):

$$\frac{d\lambda}{dt} = \mathbf{F}\lambda + \mathbf{G}w(t); \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\lambda + \mathbf{v}(t); \quad \mathbf{v}(t) = (v_1, v_2)^T; \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

Thuật toán ước lượng của bộ lọc Kalman ở dạng ma trận

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = \mathbf{F}\hat{\lambda} + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{H}\hat{\lambda}) = \mathbf{F}\hat{\lambda} + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad (2.52)$$

Trong đó: $\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{R}^{-1}$; $\mathbf{K} = \{k_{i,j}\}, i, j = 1, 2$ - ma trận hệ số khuếch đại; $\mathbf{P}$ - ma trận phương sai, $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}, i, j = 1, 2$.

Nghiệm $\mathbf{P}$ nhận được khi giải phương trình Ricatti trong chế độ xác lập dừng.

Suy ra

$$k_{11} = 100p_{11}; \quad k_{12} = 25p_{12}; \quad k_{21} = 100p_{12}; \quad k_{22} = 25p_{22} \quad (2.53)$$

Giải phương trình Ricatti, tìm các phần tử $\{k_{ij}\}$ của ma trận phương sai $\mathbf{P}$

$$\mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P} = 0$$

Khi tính đến các giá trị các ma trận $\mathbf{H}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{K}$

$$\mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{G}^T - \mathbf{K}\mathbf{P} = 0 \quad (2.54)$$

$$\text{Trong đó: } \mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{R}^{-1}$$

Từ kết quả theo (2.54), tìm các phương trình xác định các phần tử $\{k_{ij}\}$

$$-2p_{11} + 1 - 100p_{11}^2 - 25p_{12}^2 = 0;$$

$$-3p_{12} + 2 - 100p_{11}p_{12} - 25p_{12}p_{22} = 0; \quad (16.19)$$

$$-4p_{22} + 4 - 100p_{12}^2 - 25p_{22}^2 = 0.$$

Có thể viết hệ các phương trình đại số trên dưới dạng sau

$$2a + 100a^2 + 25b^2 = 1;$$

$$3b + 100b + 25bc = 2; \quad (2.55)$$

$$4c + 100b^2 + 25c^2 = 4$$

Trong đó: $a = p_{11}$; $b = p_{12}$; $c = p_{22}$.

Sau khi giải các phương trình (2.55) trên máy tính, nhận được

$$a = p_{11} = 6,8092 \cdot 10^{-2}; \quad b = p_{12} = 12,652 \cdot 10^{-2}; \quad c = p_{22} = 23,996 \cdot 10^{-2}$$

Khi đó, theo (2.53)

$$k_{11} = 6,8092; \quad k_{12} = 3,163; \quad k_{21} = 12,652; \quad k_{22} = 5,9989 \approx 6.$$

Phương trình ước lượng lọc Kalman ở dạng vô hướng

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} &= -\hat{\lambda}_1 + 6,8092(x_1 - \hat{\lambda}_1) + 3,1629(x_2 - \hat{\lambda}_2) \\ \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} &= -2\hat{\lambda}_2 + 12,6516(x_1 - \hat{\lambda}_1) + 6(x_2 - \hat{\lambda}_2). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Hàm ma trận $\Phi(s)$ có dạng

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_{22} + 2 + s & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} + 1 + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_{11}(k_{22} + 2 + s) - k_{12}k_{21} & k_{12}(k_{22} + 2 + s) - k_{12}k_{22} \\ k_{21}(k_{11} + 1 + s) - k_{11}k_{21} & k_{22}(k_{11} + 1 + s) - k_{12}k_{21} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{k_{11}(s + c_1)}{(s - s_1)(s - s_2)} & \frac{k_{12}(s + 2)}{(s - s_1)(s - s_2)} \\ \frac{k_{21}(s + 1)}{(s - s_1)(s - s_2)} & \frac{k_{22}(s + c_2)}{(s - s_1)(s - s_2)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

Trong đó: - các nghiệm của phương trình $\Delta = 0$; $s_1 = -14,2306 = -a$; $s_2 = -1,577 = -b$;

$$c_1 = (k_{11}k_{22} + 2k_{11} - k_{12}k_{21}) / k_{11} = k_{22} + 2 - k_{12}k_{21} / k_{11} = 2,12226;$$

$$c_2 = 1 + k_{11} - k_{12}k_{21} / k_{22} = 1 + k_{11}(1 - 4k_2^2) = 1 - 0,002137 = 0,997863 \approx 1 \quad (2.60)$$

2.2.5. Trường hợp ứng dụng 5.

Xác định cự ly đến mục tiêu đang chuyển động với gia tốc hằng số, chuyển động này bị tác động từ các nhiễu động $\omega_1(t), \omega_2(t)$ với hàm ma trận tương quan

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}; \quad \text{Giá trị ban đầu; } \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Tạp trắng trong kênh quan sát $E(n_i) = 0$ và hàm tương quan $R_n(\tau) = R\delta(\tau)$, $R = 100M^2$. Các giá trị ban đầu của ước lượng cự ly, của tốc độ và gia tốc từ mục tiêu bằng $\hat{r}_0 = 23150m$; $\hat{v}_0 = -150m/c$; $\hat{\alpha}_0 = 0$; Giá trị thực của các thông số chuyển động $r_0 = 2300m$; $v_0 = -200m/c$; $\alpha_0 = 0,8m/c^2$.

Thực hiện tính toán. Phương trình chuyển động của mục tiêu

$$\dot{x}_1 = x_2 + w_1(t); \quad \dot{x}_2 = x_3 + w_2(t); \quad \dot{x}_3 = 0$$

Trong đó $x_1 = x_1(t)$ - cự ly đến mục tiêu, $x_2 = x_2(t)$; $x_3 = x_3(t)$ tốc độ và gia tốc.

$$\text{Phương trình quan sát} \quad y(t) = x(t) + n(t)$$

Dạng ma trận của phương trình chuyển động và quan sát

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}w(t). \quad (2.61)$$

$$y(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t)$$

Trong đó:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình xác định ước lượng tối ưu của bộ lọc

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(y(t) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.62)$$

Phương trình Ricatti xác định ma trận phương sai

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{P} / R \quad (2.63)$$

Do $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}, i, j = \overline{1,3}$, khi $d\mathbf{P}/dt = 0$, nhận được

$$p_{13} = p_{23} = p_{33} = 0; \quad 2p_{12} = p_{11}^2 / R; \quad p_{22} = p_{11}p_{12} / R; \quad p_{12}^2 / R = 0,1$$

$$p_{12} = \sqrt{0,1R}; \quad p_{11} = \sqrt{2Rp_{12}} = \sqrt{2R\sqrt{0,1R}};$$

$$p_{22} = \sqrt{2R\sqrt{0,1R}}\sqrt{0,1R} / R = \sqrt{0,2\sqrt{0,1R}}, \text{ ở chế độ dừng}$$

$$p_{12} = \sqrt{10} = 3,16; \quad p_{11} = 10\sqrt{2\sqrt{10}} = 25,15; \quad p_{22} = \sqrt{2\sqrt{0,1}} = 0,795$$

PTVP cho các phần tử phương sai

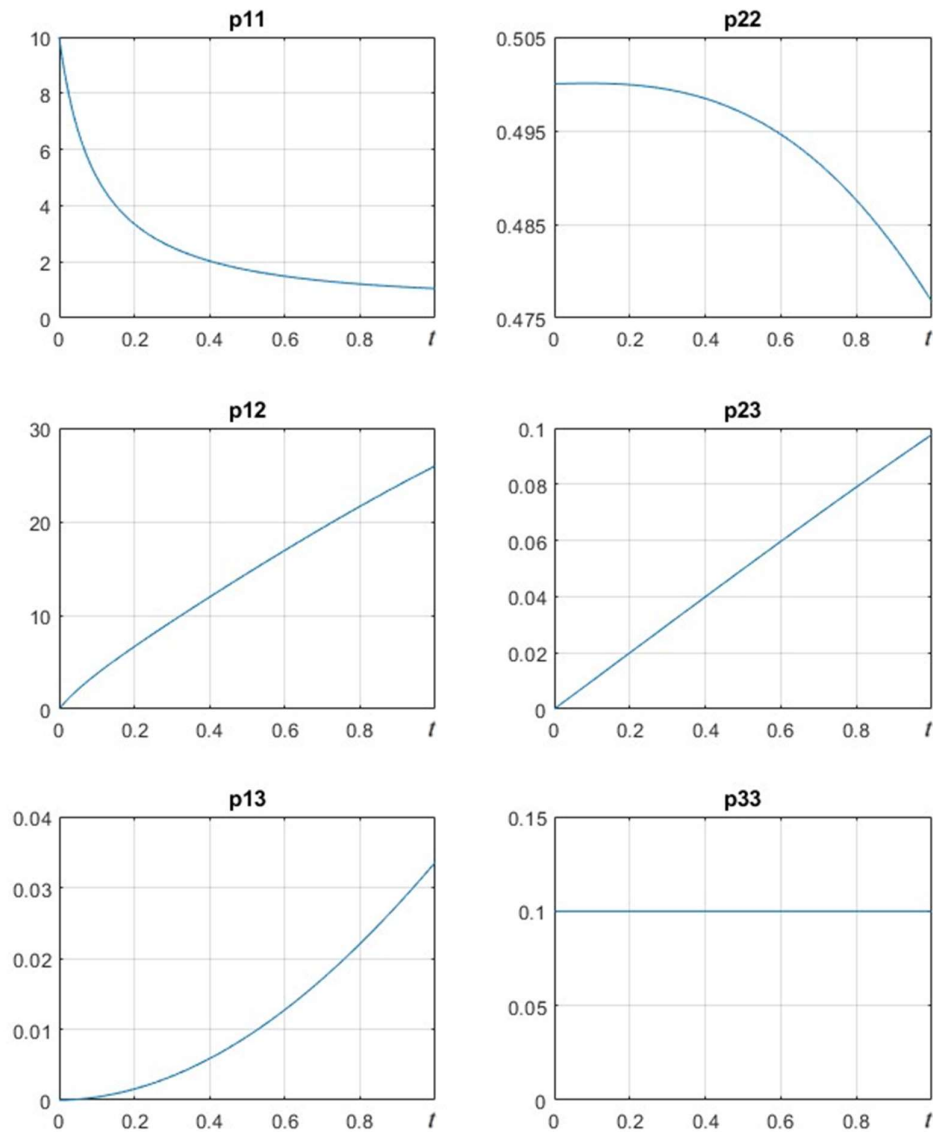
$$\frac{dp_{11}}{dt} = 2p_{12} - \frac{p_{11}^2}{R}; \quad \frac{dp_{12}}{dt} = p_{13} + p_{22} - p_{11} \frac{p_{12}}{R}$$

$$\frac{dp_{13}}{dt} = p_{23} - p_{11} \frac{p_{13}}{R}; \quad \frac{dp_{22}}{dt} = 2p_{23} + 0.1 - \frac{p_{12}^2}{R}$$

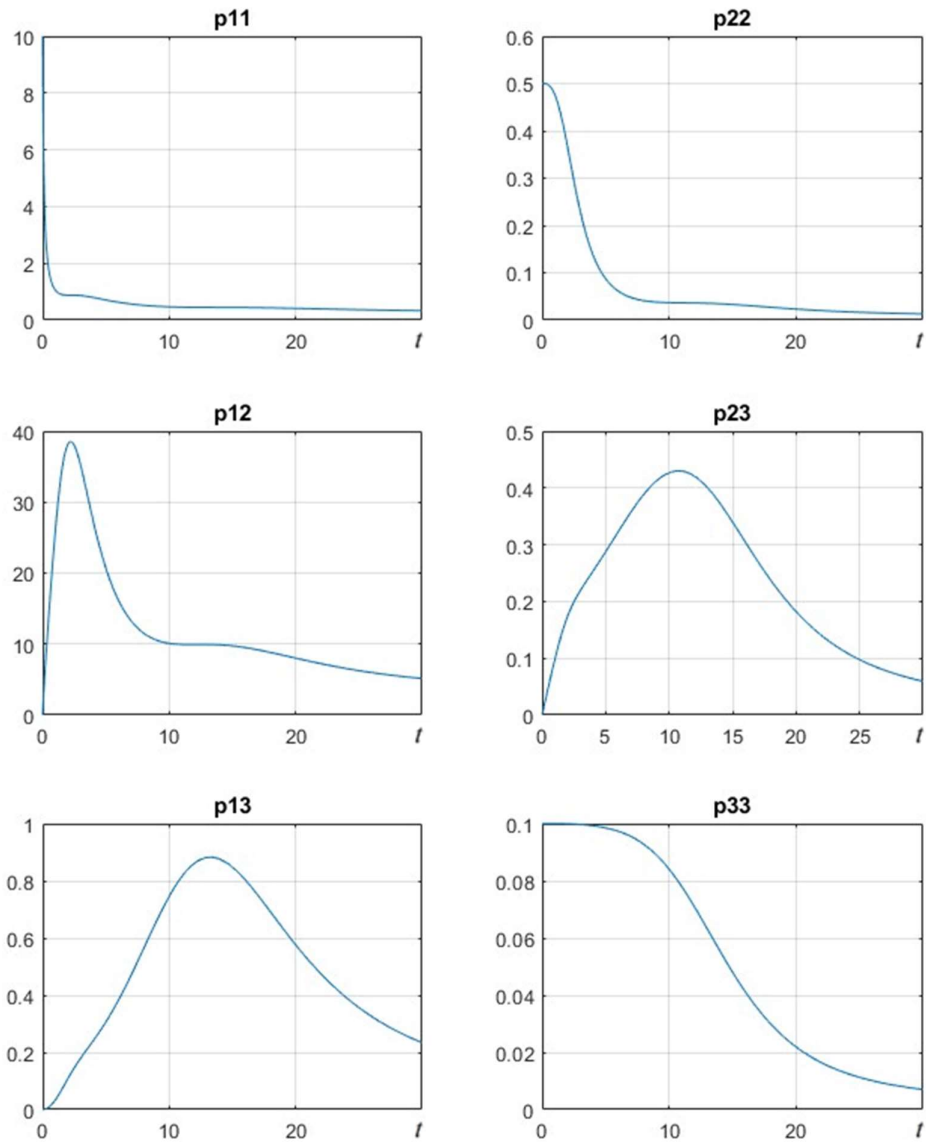
$$\frac{dp_{23}}{dt} = p_{33} - p_{12} \frac{p_{13}}{R}; \quad \frac{dp_{33}}{dt} = -\frac{p_{13}^2}{R}$$

Với điều kiện ban đầu $p_{11}^0 = 10^3$; $p_{22}^0 = 50$; $p_{33}^0 = 0,1$, khi $R = 100$.

Trên hình Hình 2-3 và Hình 2-4 biểu diễn sự phụ thuộc thời gian của các phần tử $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{33}$, lưu ý các phần tử p_{11}, p_{22} với thừa số 0,01.



Hình 2-3: Sự phụ thuộc thời gian của các phần tử $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{33}$ với $t=(0;1)$



Hình 2-4: Sự phụ thuộc thời gian của các phần tử $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{33}$ với $t=(0;30)$

KẾT THÚC TÓM TẮT CHƯƠNG 2

CHƯƠNG 3: ỨNG DỤNG LỌC KALMAN XÂY DỰNG MÁY THU TỐI ƯU TRÊN NỀN TẠP ÂM VÀ NHIỄU

3.1. Xây dựng cấu trúc máy thu tối ưu:

$$\text{Phương trình kênh quan sát } x(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + n(t), \quad (3.1)$$

Trong đó: $\lambda_1(t)$ - thông tin hữu ích; $\lambda_2(t)$ - nhiễu; $n(t)$ - tạp trắng Gauss $R_n(\tau) = S_0\delta(\tau)$. Xây dựng bộ lọc lấy ra thông tin $\lambda_1(t)$ trong nhiễu tạp trắng $n(t)$ và nhiễu $\lambda_2(t)$ có phổ dạng tương tự phổ thông tin và xen lẫn chồng nhau. Phương trình trạng thái tiên nghiệm

$$\begin{aligned} d\lambda_1 / dt &= -\alpha_1\lambda_1 + w_1(t); \\ d\lambda_2 / dt &= -\alpha_2\lambda_2 + w_2(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

Trong đó: $w_1(t)$ và $w_2(t)$ - các tạp trắng độc lập có kỳ vọng bằng 0 và hàm tương quan $R_1(\tau) = S_1\delta(\tau)$; $R_2(\tau) = S_2\delta(\tau)$ (3.3)

Các phương trình tiên nghiệm ở dạng ma trận

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda} + n(t); \quad \mathbf{H} = [1, 1]; \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^T; \quad (3.4)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{F}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{w}(t), \quad (3.5)$$

$$\text{Trong đó: } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

Các ma trận $\mathbf{H}, \mathbf{F}$ là hằng số, và mô hình tuyến tính nên bài toán là lọc tối ưu tuyến tính.

$$\text{Phương trình lọc Kalman có dạng } \frac{d\hat{\boldsymbol{\lambda}}}{dt} = \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{D}\mathbf{H}^T S_0^{-1} \left[x(t) - (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2) \right]. \quad (3.6)$$

Ký hiệu: $\mathbf{D}\mathbf{H}^T = (a_1, a_2)^T$; $a_1 = d_{11} + d_{12}$; $a_2 = d_{12} + d_{22}$; $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T$; $k_1 = S_0^{-1}a_1$; $k_2 = S_0^{-1}a_2$, trong đó - các phần tử ma trận phương sai $\mathbf{D}$; $\mathbf{k}$ - hệ số khuếch đại lọc Kalman. Ở dạng vô hướng (3.6) sẽ là

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} &= -\alpha_1\hat{\lambda}_1 + a_1S_0^{-1}z - a_1S_0^{-1}\hat{\lambda}_1 - a_1S_0^{-1}\hat{\lambda}_2 \\ \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} &= -\alpha_2\hat{\lambda}_2 + a_2S_0^{-1}z - a_2S_0^{-1}\hat{\lambda}_1 - a_2S_0^{-1}\hat{\lambda}_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Đặt thời gian chuẩn hóa $\tau = \alpha_1 t$ và toán tử $p = d / dt$, chuyển hệ PTVP (3.7) về dạng

$$\begin{pmatrix} p+1+\beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & p+\alpha+\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} z, \quad (3.8)$$

Trong đó: $\beta_1 = a_1 S_0 / \alpha_1 = k_1 / \alpha_1$; $\beta_2 = a_2 S_0 / \alpha_1 = k_2 / \alpha_1$; $\alpha = \alpha_2 / \alpha_1$.

Suy ra các hàm truyền đạt theo tín hiệu $H_1(p)$ và theo nhiễu $H_2(p)$:

$$H_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad H_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (3.9)$$

Trong đó

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} p+1+\beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & p+\alpha+\beta_2 \end{vmatrix} = (p+1+\beta_1)(p+\alpha+\beta_2) - \beta_1\beta_2 = \\ &= (p^2 + \alpha + \beta_2 + \beta_1\alpha) + (1 + \alpha + \beta_1 + \beta_2)p \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta + \alpha + \beta_2 \end{vmatrix} = \beta_1(p + \alpha); \Delta_2 = \begin{vmatrix} p+1+\beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \beta_2(p+1) \end{aligned}$$

Đặt $p = j\Omega$; $\Omega = \omega / \alpha_1$, tìm bình phương modul đặc tính tần số

$$|H_1(i\Omega)|^2 = \frac{\beta_1^2(\alpha^2 + \Omega^2)}{(\alpha + \beta_2 + \beta_1\alpha - \Omega^2)^2 + (1 + \alpha + \beta_1 + \beta_2)^2 \Omega^2}; \quad (3.10)$$

$$|H_2(i\Omega)|^2 = \frac{\beta_2^2(1 + \Omega^2)}{(\alpha + \beta_2 + \beta_1\alpha - \Omega^2)^2 + (1 + \alpha + \beta_1 + \beta_2)^2 \Omega^2} \quad (3.11)$$

Từ đó xét tỷ số

$$\varepsilon = \frac{|H_1(i\Omega)|}{|H_2(i\Omega)|} = \frac{\beta_1 \sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}}{\beta_2 \sqrt{1 + \Omega^2}}$$

Trường hợp $\varepsilon_{\Omega \rightarrow \infty} \rightarrow (\beta_1 / \beta_2) = \varepsilon_\infty$; $\varepsilon(0) = (\beta_1 \alpha / \beta_2) = \alpha \varepsilon_\infty = \varepsilon_0$.

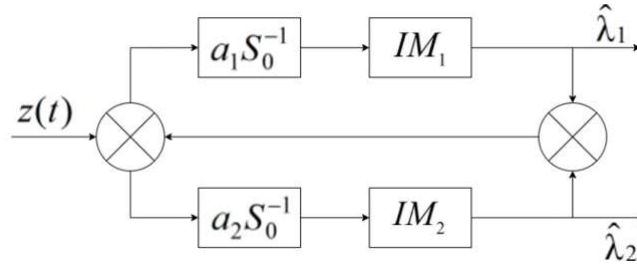
$$\text{Phương trình phương sai } \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{D}\mathbf{H}^T S_0^{-1} \mathbf{H}\mathbf{D}; \quad \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0 \quad (3.12)$$

Đặt thời gian chuẩn hóa $\tau = \alpha_1 t$. Nhận được hệ PTVP phương sai

$$\begin{aligned} d(d_{11}) / d\tau &= S_1 / \alpha_1 - 2d_{11} - S_0^{-1} a_1^2 / \alpha_1; \\ d(d_{22}) / d\tau &= S_2 / \alpha_1 - 2\alpha d_{22} - S_0^{-1} a_2^2 / \alpha_1; \\ d(d_{12}) / d\tau &= -(1 + \alpha)d_{12} - S_0^{-1} a_1 a_2 / \alpha_1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Chuyển (3.7) về dạng

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} + \alpha_1 \lambda_1 &= a_1 S_0^{-1} [x - (\lambda_1 + \lambda_2)] \\ \frac{d\lambda_2}{dt} + \alpha_2 \lambda_2 &= a_2 S_0^{-1} [x - (\lambda_1 + \lambda_2)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$



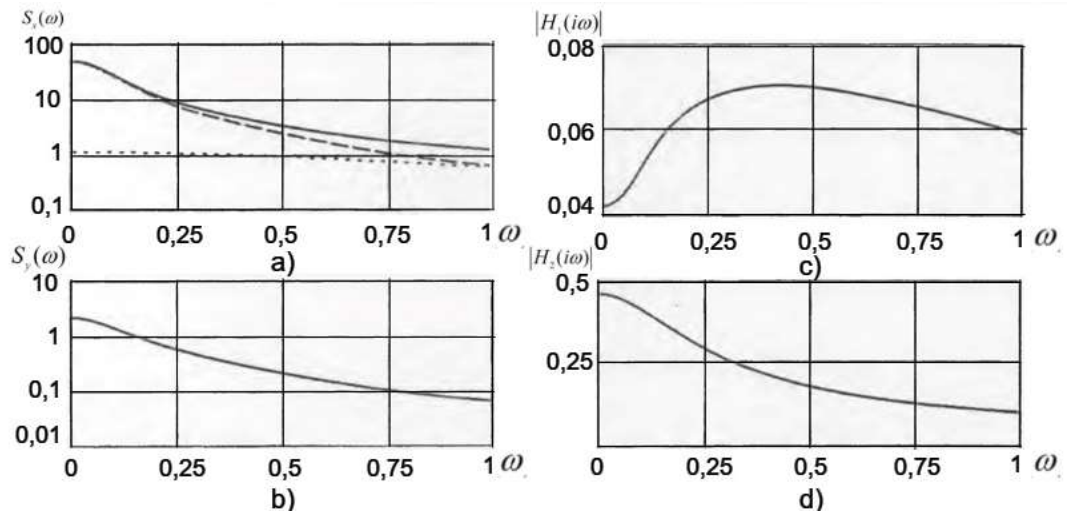
Hình 3-1: Sơ đồ cấu trúc bộ lọc tối ưu

Trên Hình 3-1 các mạch lấy tích phân IM_1 và IM_2 có hàm truyền đạt

$$H_1(s) = \frac{1}{s + \alpha_1}; \quad H_2(s) = \frac{1}{s + \alpha_2}. \quad (3.16)$$

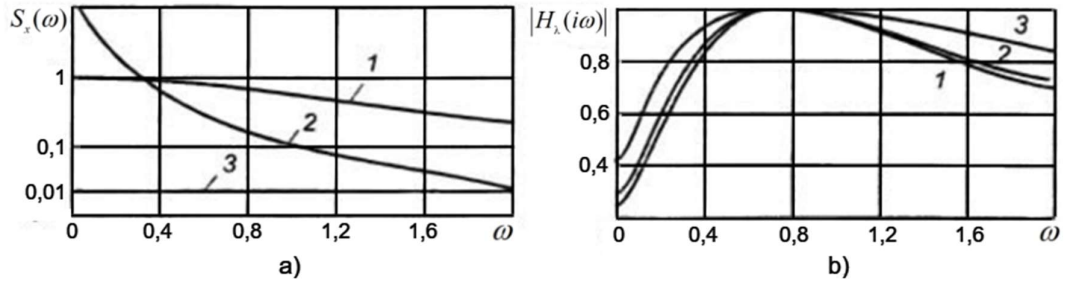
Máy thu có hai kênh đối xứng lọc thông tin $\lambda_1(t)$ và nhiễu $\lambda_2(t)$.

Xét chế độ dừng, LVCH đã xây dựng công thức quan hệ các đặc tính tần số của bộ lọc liên quan tới đặc tính phổ tín hiệu và nhiễu (xem đồ thị)

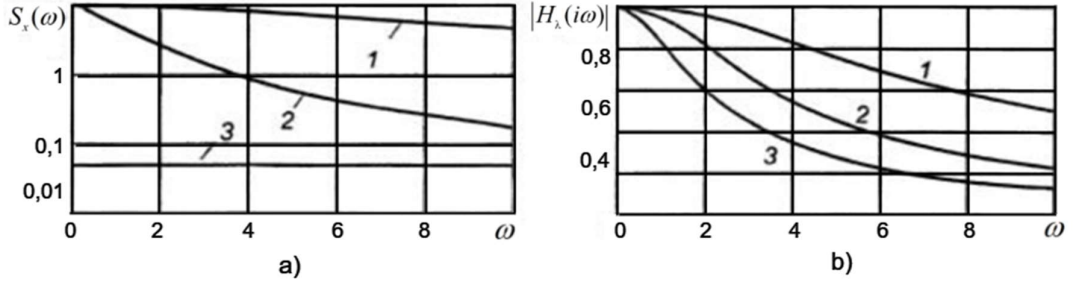


Hình 3-2: Biểu diễn: a- phổ tín hiệu và nhiễu ở lối vào; b- phổ lối ra kênh lọc tín hiệu; c- đặc tính biên độ tần số theo tín hiệu; d- đặc tính biên độ tần số theo nhiễu;

Với các thông số khác của thông tin và quan sát cho lọc Kalman, xây dựng các đồ thị Hình 3-3 –Hình 3-6.



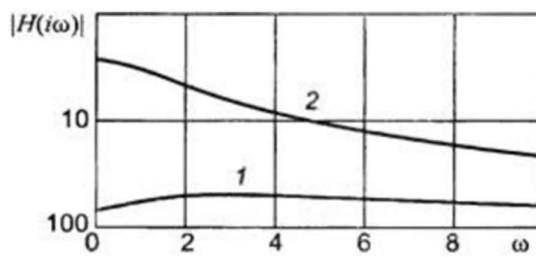
Hình 3-3: Đồ thị phổ lượng vào và đồ thị ĐTBĐTS với $\alpha_1 / \alpha_2 = 10$



Hình 3-4: Đồ thị phổ lượng vào và đồ thị ĐTBĐTS với $\alpha_1 / \alpha_2 = 0,1$

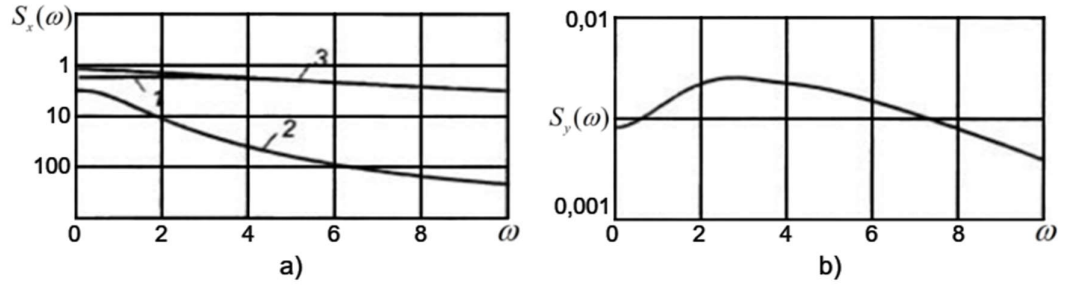
Trên Hình 3-3 a- thể hiện các phổ tín hiệu $S_{\lambda_1}(\omega)$ – đường cong 1; $S_{\lambda_2}(\omega)$ – đường cong 2; và phổ tạp trắng – đường cong 3; trên Hình 3-3 b thể hiện đồ thị ĐTBĐTS (đặc tính biên độ tần số) $|H_1(i\omega)|$ theo tín hiệu (các đường cong 1-3 tại cường độ phổ tạp trắng tương ứng $\eta = 1; 10; 100$; trong tất các trường hợp $\alpha_1 / \alpha_2 = 10$).

Theo trình tự này, thực hiện tính toán các đồ thị trên Hình 3-4 tại $\alpha_1 / \alpha_2 = 0,1$, còn các đường cong 1-3 tại cường độ phổ tạp trắng $0,1; 1; 10 \left[\eta = \sigma^2 / (\sigma_2^2 + S_0 \alpha) \right]$.



Hình 3-5: Đồ thị ĐTBĐTS theo tín hiệu tại $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,1; S_0 = 20; S_1 = 0,25; S_2 = 0,5$.

Trên Hình 3-5 mô tả đồ thị ĐTBĐTS theo tín hiệu $|H_1(i\omega)|$ (đường cong 1) và theo nhiễu $|H_2(i\omega)|$ (đường cong 2) tại $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,1; S_0 = 20; S_1 = 0,25; S_2 = 0,5$.



Hình 3-6: Đồ thị phổ lượng vào và ra tại $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,1; S_0 = 20; S_1 = 0,5; S_2 = 0,25$.

Trên Hình 3-6 a – thể hiện phổ tín hiệu $S_{\lambda_1}(\omega)$ (đường cong 1), phổ nhiễu $S_{\lambda_2}(\omega)$ (đường cong 2) và phổ lượng vào bộ lọc $S_x(\omega)$ (đường cong 3); Hình 3-6 b thể hiện phổ lượng ra $S_y(\omega)$ tại $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,1; S_0 = 20; S_1 = 0,5; S_2 = 0,25$.

Từ các Hình 3-2 – 3.6, thấy rõ với các giá trị thông số được xét, đã nhận được ý nghĩa vật lý lọc tối ưu chế áp nhiễu, tại đó ĐTBĐTS theo tín hiệu là tối thiểu trên dải tần số này trong điều kiện mức nhiễu lớn và mức tín hiệu nhỏ, và sẽ tăng khi ngược lại, còn, ĐTBĐTS theo nhiễu sẽ tối thiểu khi mức tín hiệu lớn và mức nhiễu nhỏ, trường hợp ngược lại ĐTBĐTS theo nhiễu sẽ tăng lên.

Như vậy, thuật toán nhận được cho phép xây dựng sơ đồ hiệu quả bù khử nhiễu. Từ Hình 3-3 b thấy rằng phổ lượng ra sẽ chế áp (làm giảm) nhiễu mạnh hơn ở các tần số, mà tại đó thành phần nhiễu có mức lớn.

Theo các phương trình (3.2), phân tích bộ bù khử nhiễu nêu trên mới chỉ với tín hiệu và nhiễu ở trong vùng thấp tần. Có thể mở rộng bài toán này sang bộ bù khử nhiễu dải thông hẹp (trong vùng trung tần và cao tần), được giải quyết ở mục tiếp sau đây.

3.2. Xây dựng hệ tối ưu có tính đến bù khử nhiễu phổ hẹp vùng tần số cao

Xét các QTNN có dải phổ tần hẹp ở dạng hai thành phần QTNN Marcov

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) \cos \omega t + \lambda_2(t) \sin \omega t. \quad (3.20)$$

Giả định, các thành phần cầu phương $\lambda_1(t)$ và $\lambda_2(t)$ được mô tả bởi các PTVPNN

$$\begin{aligned} d\lambda_1 / dt &= -\alpha\lambda_1(t) + n_1(t) \\ d\lambda_2 / dt &= -\alpha\lambda_2(t) + n_2(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Trong đó: $n_1(t)$ và $n_2(t)$ là các tạp trắng Gauss độc lập với cường độ phổ $S_1(\omega) = S_2(\omega) = r_\lambda$.

Như vậy, từ (3.21) suy ra bộ lọc tạo hình (LTH) có hàm truyền đạt $H(p) = 1 / (p + \alpha)$ cho $\lambda_1(t)$ và $\lambda_2(t)$, do đó mật độ phổ lượng ra LTH là

$$S_2(\omega) = \frac{r_\lambda}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{r_\lambda}{2\alpha} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

Lưu ý, các hàm tương quan của $\lambda_1(t)$ và $\lambda_2(t)$ là

$$R_{\lambda_1}(\tau) = R_{\lambda_2}(\tau) = r_\lambda / (2\alpha) e^{-\alpha|\tau|}$$

Từ (3.20), thấy QTNN $\lambda(t)$ có hàm tương quan $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega\tau$. $\omega \gg \alpha$; $\sigma_\lambda^2 = r_\lambda / (2\alpha)$. (3.22)

Lấy đạo hàm QTNN λ :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\lambda_1}{dt} \cos \omega t - \omega \lambda_1 \sin \omega t + \frac{d\lambda_2}{dt} \sin \omega t + \omega \lambda_2(t) \cos \omega t.$$

Kết quả

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\alpha\lambda(t) - \omega\mu(t) + n_1(t) \cos \omega t + n_2(t) \sin \omega t, \quad (3.23)$$

Trong đó: $\mu(t) = \lambda_1(t) \sin \omega t - \lambda_2(t) \cos \omega t$.

$$d\mu / dt = -\alpha\mu(t) + \omega\lambda(t) + n_1(t) \sin \omega t - n_2(t) \cos \omega t, \quad (3.24)$$

Lưu ý, các PT (3.22) và (3.23) mô tả mô hình tín hiệu QTNN $\lambda(t)$.

$$\text{Còn kênh quan sát } z(t) = s(t) + \lambda(t) + n_0(t) \quad (3.25)$$

Trong đó: $s(t)$ - tín hiệu hữu ích dải phổ hẹp; $\lambda(t)$ - nhiễu phổ hẹp; $n_0(t)$ - tạp nhiễu trắng kênh quan sát với kỳ vọng bằng 0 và hàm tương quan $R(\tau) = S_0 \delta(\tau)$.

Các thành phần $s(t)$ và $\lambda(t)$ có mô hình dạng

$$\begin{aligned} ds / dt &= -\alpha s(t) - \omega_0 r(t) + n_1 \cos \omega_0 t + n_2 \sin \omega_0 t \\ dr / dt &= -\alpha r(t) + \omega_0 s(t) + n_1 \sin \omega_0 t - n_2 \cos \omega_0 t \\ d\lambda / dt &= -\beta \lambda(t) - \omega_1 \mu(t) + n_3 \cos \omega_1 t + n_4 \sin \omega_1 t; \\ d\mu / dt &= -\beta \mu(t) + \omega_1 \lambda(t) + n_3 \sin \omega_1 t - n_4 \cos \omega_1 t \end{aligned}$$

Trong đó: $n_1 = n_1(t), n_2 = n_2(t), n_3 = n_3(t), n_4 = n_4(t)$ - các tạp trắng Gauss độc lập với kỳ vọng xác suất bằng 0 và mật độ phổ dạng $S_1(\omega) = S_2(\omega) = r_s$; $S_3(\omega) = S_4(\omega) = r_\lambda$;

Các ước lượng tối ưu $\hat{s}$ và $\hat{\lambda}$ có thể nhận từ phương trình lọc Kalman ở dạng ma trận. Do phương trình kênh quan sát (3.25) là vô hướng, nên hệ số khuếch đại có dạng đơn giản hơn

$$\mathbf{K} = (1/S_0) \mathbf{D} \mathbf{H}^T = (1/S_0) (a_1, a_2, a_3, a_4)^T = (k_1, k_2, k_3, k_4)^T,$$

$$\mathbf{D} = \{d_{ik}\}, i, k = \overline{1, 4}; \mathbf{H} = (1, 0, 1, 0); a_1 = d_{11} + d_{13} = d_{11} + d_{31}$$

$$\text{Trong đó: } a_2 = d_{21} + d_{23} = d_{12} + d_{23}; a_3 = d_{31} + d_{33} = d_{13} + d_{33}; a_4 = \\ = d_{41} + d_{43} = d_{14} + d_{34}$$

$$\text{Phương trình ước lượng lọc Kalman } d\hat{\lambda}/dt = \mathbf{F}\hat{\lambda}(t) + \mathbf{K}[x(t) - \mathbf{H}\hat{\lambda}] \quad (3.28)$$

$$\text{Trong đó: } \hat{\lambda} = (\hat{s}, \hat{r}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})^T$$

Ma trận phương sai $\mathbf{D}$ thỏa thuận PT Ricatti

$$d\mathbf{D}/dt = \mathbf{F}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - (1/S_0) \mathbf{D}\mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{D}; \quad \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0, \quad (3.29)$$

$$d\mathbf{D}/dt = 0$$

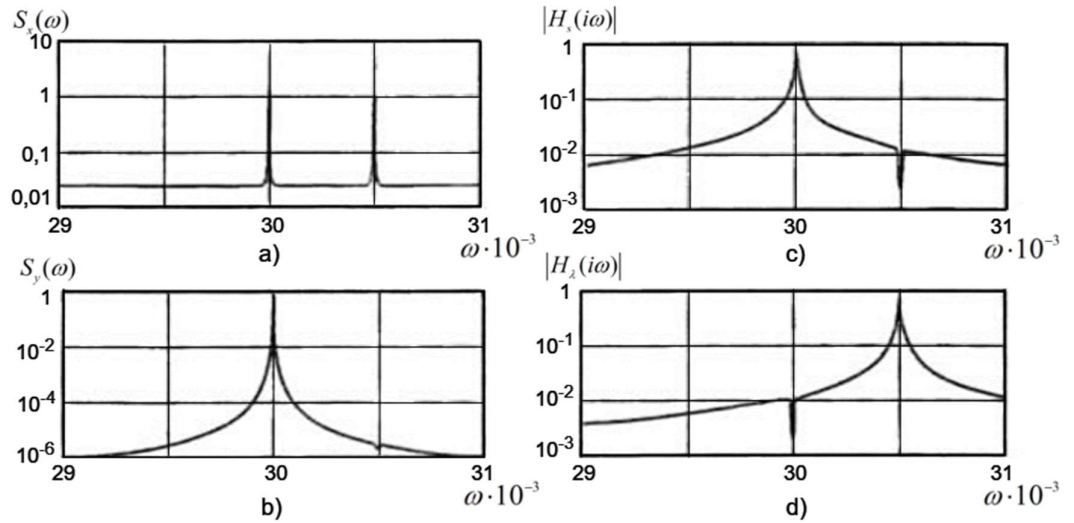
$$\text{Trong đó: } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}_1 = r_s \mathbf{I}; \quad \mathbf{Q}_2 = r_\lambda \mathbf{I}$$

Xét chế độ dừng khi $d\mathbf{D}/dt = 0$, ĐTBĐTS của lọc Kalman theo tín hiệu và nhiễu.

Tìm phổ hiệu dụng

$$S_x(\omega) = S_s(\omega) + S_\lambda(\omega) + S_0 = \\ = \frac{\sigma_s^2}{\alpha} \left[\frac{1}{1 + (\Omega - \Omega_0)^2} + \frac{\sigma_\lambda^2}{\gamma \sigma_s^2} \frac{1}{1 + \gamma^2 (\Omega - \Omega_1)^2} + \frac{S_0 \alpha}{\sigma_s^2} \right], \quad (3.31)$$

$$\text{Trong đó: } \Omega_0 = \omega_0 / \alpha; \quad \Omega_1 = \omega_1 / \alpha; \quad \Omega = \omega / \alpha.$$



Hình 3-7: Phổ hiệu dụng lượng vào kênh quan sát $S_x(\omega)$ và phổ hiệu dụng lượng ra kênh quan sát $S_y(\omega)$

Trong chế độ dừng ở dạng toán tử Laplace, PT lọc Kalman có dạng

$$\mathbf{A}(p)\mathbf{\Lambda}(p) = \mathbf{K}x(p), \quad (3.32)$$

Trong đó

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p + \alpha + k_1 & \omega_0 & k_1 & 0 \\ k_2 - \omega_0 & p + \alpha & k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & p + \beta + k_3 & \omega_1 \\ k_4 & 0 & k_4 - \omega_1 & p + \beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}(p) = \begin{pmatrix} \hat{s}(p) \\ \hat{r}(p) \\ \hat{\lambda}(p) \\ \hat{\mu}(p) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}.$$

Khi đó, hàm truyền đạt theo tín hiệu và theo nhiễu tương ứng là

$$H_s(p) = \Delta_s / \Delta; \quad H_\lambda(p) = \Delta_\lambda / \Delta,$$

Trong đó

$$\Delta_s = [(p + \beta)^2 + \omega_1^2][k_1(\alpha + p) - k_2\omega_0];$$

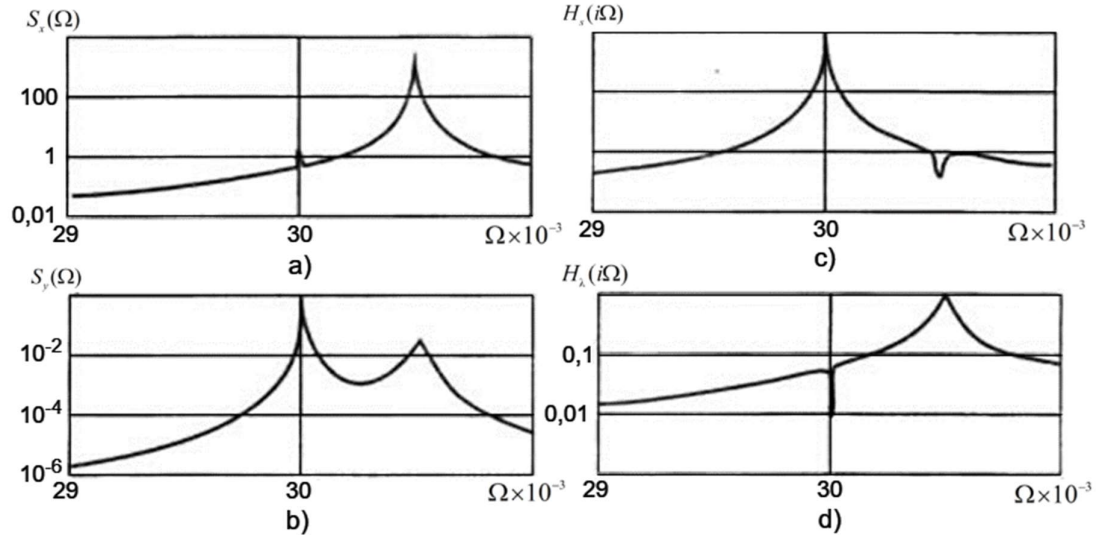
$$\Delta_\lambda = [(p + \alpha)^2 + \omega_0^2][k_3(\beta + p) - k_4\omega_1];$$

$$\Delta = [(\alpha + p)^2 + \omega_0^2][(p + \beta)^2 + \omega_1^2 + k_3(\beta + p) - k_4\omega_1] + \Delta_s$$

Từ đó tìm được các ĐTTS tương ứng

$$H_s(i\omega) = (\omega_1^2 - \omega^2 + \beta^2 + i2\beta\omega)(k_1\alpha - k_2\omega_0 + ik_1\omega) / \Delta(i\omega);$$

$$H_\lambda(i\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha^2 + i2\alpha\omega)(k_3\beta - k_4\omega_1 + ik_3\omega) / \Delta(i\omega),$$



Hình 3-8: Phổ hiệu dụng $S_x(\omega)$ ở lối vào và phổ $S_y(\omega)$ ở lối ra bộ lọc Kalman và các các ĐTBĐTS theo tín hiệu $S_x(\omega)$ và ĐTBĐTS theo nhiễu $S_y(\omega)$ tại

$$\gamma = 0,1; \sigma_\lambda = 10; \sigma_s = 1; \Omega_1 = 3,05 \cdot 10^4; \Omega_0 = 3 \cdot 10^4$$

Trong đó

$$\begin{aligned} \Delta(i\omega) = & (\alpha^2 + \omega_0^2 - \omega^2)(\beta^2 + \omega_1 - \omega^2 + k_3\beta - k_4\omega_1) - \\ & - 2\alpha(2\beta + k_3)\omega^2 + (\beta^2 + \omega_1^2 - \omega^2)(k_1\alpha - k_2\omega_0) - 2\beta k_1\omega^2 + \\ & + i\left\{ \left[2\alpha\omega(\beta^2 + \omega_1^2 - \omega^2 + k_3\beta - k_4\omega_1) \right] + (2\beta + k_3)(\alpha^2 + \omega_0^2 - \omega^2)\omega + \right. \\ & \left. + 2\beta\omega(k_1\alpha - k_2\omega_0) + k_1\omega(\beta^2 + \omega_1^2 + \omega^2) \right\}. \end{aligned}$$

Tiến hành chuẩn hóa theo cách cùng chia tử số và mẫu số cho đại lượng α^4 và xác định các ĐTBĐTS $|H_s(i\omega)|$ và $|H_\lambda(i\omega)|$, ta có được các sự phụ thuộc trên Hình 3-7 b, d với các giá trị tham số đã nêu ($\omega \equiv \Omega$).

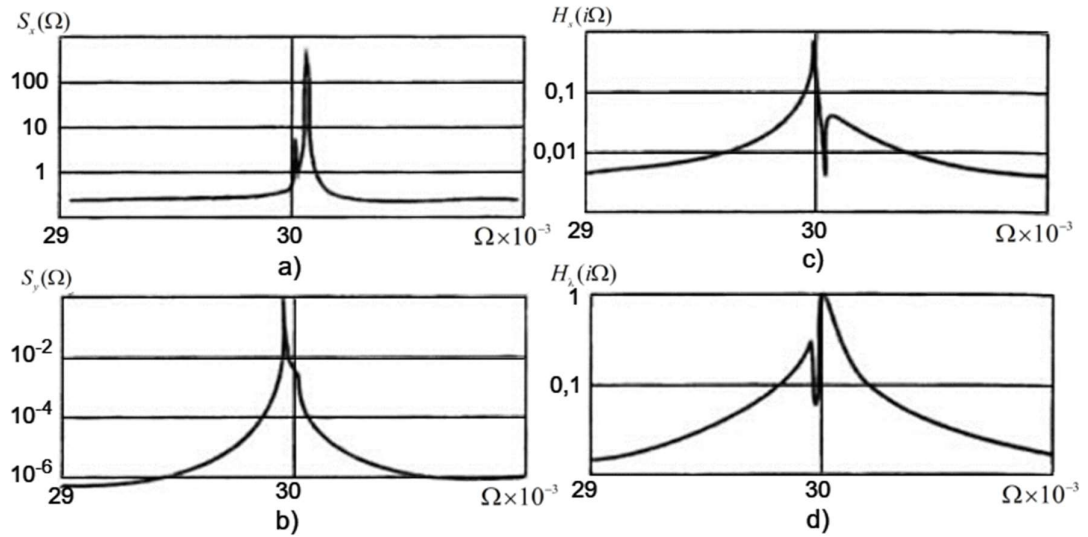
Các đồ thị $|H_s(i\omega)|$ và $|H_\lambda(i\omega)|$ chỉ ra, trường hợp thứ nhất, chế áp mạnh nhiễu được thể hiện khi $|H_\lambda(i\Omega_1)| = 1,487 \cdot 10^{-3}$ so sánh với $|H_s(i\Omega_0)| = 0,844$; $|H_\lambda|/|H_s| = 1,76 \cdot 10^{-3}$,

Trường hợp thứ hai, chế áp mạnh tín hiệu hữu ích $|H_s(i\Omega_0)| = 1,959 \cdot 10^{-3}$ so sánh với $|H_\lambda(i\Omega_1)| = 0,863$, $|H_s|/|H_\lambda| \approx 2,27 \cdot 10^{-3}$. Ở trường đầu hoặc ở trường hợp sau, chế áp đều ở mức hơn 40 dB.

Trên các Hình 3-8 và Hình 3-9 thấy rõ, việc chế áp nhiễu được thực hiện hơn nhiều so với công suất tín hiệu, điều này có được ngay cả khi phổ tín hiệu và phổ nhiễu bị chen xếp chồng nhau.

Trên Hình 3-8 a và b, mô tả phổ hiệu dụng $S_x(\omega)$ ở lối vào và phổ $S_y(\omega)$ ở lối ra bộ lọc Kalman. Trên Hình 3-8 c và d mô tả các ĐTBĐTS theo tín hiệu $S_x(\omega)$ và ĐTBĐTS theo nhiễu $S_y(\omega)$ tại $\gamma = 0,1; \sigma_\lambda = 10; \sigma_s = 1; \Omega_1 = 3,05 \cdot 10^4; \Omega_0 = 3 \cdot 10^4$.

Theo trình tự này cũng tính toán các đặc tính tương tự được mô tả ở Hình 3-9 tại các giá trị $\gamma = 1; \sigma_\lambda = 10; \sigma_s = 1; \Omega_1 = 3,005 \cdot 10^4; \Omega_0 = 3 \cdot 10^4$



Hình 3-9: Phổ hiệu dụng $S_x(\omega)$ ở lối vào và phổ $S_y(\omega)$ ở lối ra bộ lọc Kalman và các các ĐTBĐTS theo tín hiệu $S_x(\omega)$ và ĐTBĐTS theo nhiễu $S_y(\omega)$ tại $\gamma = 1; \sigma_\lambda = 10; \sigma_s = 1; \Omega_1 = 3,005 \cdot 10^4; \Omega_0 = 3 \cdot 10^4$

Như vậy, thuật toán Kalman nhận được cho phép tính toán xây dựng sơ đồ hiệu quả bù khử nhiễu có dải thông tần hẹp.

KẾT THÚC TÓM TẮT CHƯƠNG 3

III. KẾT LUẬN

Luận văn này đã đạt được những kết quả quan trọng như sau:

- Xây dựng được phương pháp tính toán bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục, giúp nâng cao hiệu quả xử lý và độ chính xác trong các ứng dụng cụ thể.
- Đề xuất được các cải tiến trong thuật toán bộ lọc Kalman để phù hợp với các loại tín hiệu liên tục có tính chất khác nhau.
- Ứng dụng thành công phương pháp vào một số trường hợp cụ thể, chứng minh tính khả thi và hiệu quả của phương pháp đề xuất.

Tuy nhiên, luận văn vẫn còn một số hạn chế:

- Phạm vi nghiên cứu của luận văn còn hạn chế ở một số ứng dụng cụ thể, chưa bao quát hết các lĩnh vực có thể áp dụng bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục.
- Một số giả định trong mô hình có thể chưa hoàn toàn phản ánh đầy đủ các tình huống thực tế, dẫn đến việc kết quả chưa đạt được độ chính xác cao nhất trong mọi trường hợp.

Dựa trên những kết quả đã đạt được và những hạn chế còn tồn tại, luận văn đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

- Dựa trên những kết quả đã đạt được và những hạn chế còn tồn tại, luận văn đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:
- Mở rộng phạm vi nghiên cứu và ứng dụng của phương pháp tính toán bộ lọc Kalman tín hiệu liên tục trong các lĩnh vực khác như viễn thông, y tế, và công nghiệp.
- Phát triển các mô hình và thuật toán mới nhằm khắc phục những hạn chế của các giả định ban đầu, tăng cường độ chính xác và độ tin cậy của phương pháp